3

A mi querido amigo
Virjilio J. Valdez
En prueba del verdadero
aprecio con que lo distingue
Su af.º i S. S.
Lúcas J. Cojulun

Guatemala, Junio de 1885.

ARITMETICA ELEMENTAL

Teórico-Práctica

Para uso de la Juventud Centro-Americana.

POR

Lúcas T. Cojulún,

CATEDRATICO DE LA ESCUELA DE INJENIERIA
I DEL INSTITUTO NACIONAL DEL
CENTRO.

Colección AVO
www.ufm.edu
GUATEMALA

GUATEMALA

IMP. DE P. ARENALES, 9.ª CALLE PONIENTE N.° 20

1885.

A LA INOLVIDABLE MEMORIA

DEL BENEMERITO DE LA PATRIA

Ciudadano J. Rufino Barrios,

ILUSTRE MARTIR DE LA UNION CENTRO-AMERICANA,

JENERAL DE DIVISION I PRESIDENTE CONSTITUCIONAL

DE LA REPUBLICA DE GUATEMALA,

DEDICA

Como insignificante testimonio de profunda admiracion i eterno aprecio, el humilde fruto de sus trabajos aritmeticos.

EL AUTOR.

Guatemala, 30 de Junio de 1885.

EL CIUDADANO J. RUFINO BARRIOS

PROTECTOR DE LA INSTRUCCION POPULAR EN GUATEMALA.

Murió heróicamente en los campos de Chalchuapa, víctima por la Union Nacional, el 2 de Abril de 1885.

De Virgilio J. Valdés.

Compendio Histórico de la Aritmética.

Es indudable que la idea del número así como la idea de la extension han de haber nacido con el hombre, porque las combinaciones de la cantidad son indispensables para el comercio i trato con nuestros semejantes en la vida civil. Razon es esta por la cual el oríjen de la Aritmética se remonta á los primitivos tiempos de la antigüedad, sin poder afirmarse de un modo claro é indiscutible á qué pueblo de la Tierra se atribuye la gloria de su invencion.

Es lo cierto que los filósofos de la Grecia, aprendieron de los Indianos lo que estos sabian de la ciencia de los números; pero los historiadores, se cuidaron bien poco de dar á conocer los progresos que en ella hicieron dichos filósofos, i no fué sino pocos siglos antes de la era cristiana que comenzaron á hacer mencion de sus progresos i descubrimientos.

En el Ejipto, era la Aritmética una materia casi desconocida, porque Tales i Pitágoras, que fueron á estudiar á ese país bajo la direccion de los Sacerdotes de Ménfis, que eran los hombres más instruidos de aquellos tiempos, regresaron á la Grecia su Pátria, sin traer mayores conocimientos acerca de los números.

Pitágoras no obstante, consagrado á los esfuerzos de su fecundo injenio, cultivó con mucho interés la Aritmética é inventó la tabla de multiplicar que lleva su nombre, i que tambien se conoce con el nombre de *Abaco*. (Año 590 antes de J. C.) Asegúrase que este filósofo inventó una ciencia que llamaba *Tetractys*, i que consistía en una Aritmética *cuaternaria*, por medio de la cual evitaba las dificultades que se ofrecen en el cálculo de las cantidades radicales i fraccio-

narias.

A los discípulos de Pitágoras debe tambien la Aritmética grandes progresos, puesto que ya en tiempo de Platon i Euclides se conocian las primeras reglas; se extraian las raices cuadrada i cúbica i se conocia la teoría de las proporciones.

Cien años trascurrieron despues de Pitágoras, sin que se hiciese una nueva invencion en la Aritmética hasta que Arquímides que floreció 113 años antes de Jesucristo, inventó la teoría de las progresiones. Como se creía jeneralmente que era imposible representar con números las cantidades sumamente grandes, hubo cierto individuo, que por burlarse de Arquímides le dijo que si podría calcular el número de arenas de la playa del mar, á lo cual el filósofo, que tenía conciencia de su invento respondió: que no solo podia calcular las arenas de la playa del mar sino tambien las que pudieran caber entre las estrelles fijas i la Tierra.

Al efecto, demostró con bastante elegancia en su *Psamnita ó de número arenæ* (Aritmética arenaria) que el término quinjentèsimo de una progresion décupla creciente resolvía indefectiblemente esta cuestion.

Trascurridos dos siglos sin que se hubiese vuelto á decir algo acerca de las progresiones, ocurrió el célebre suceso siguiente: el Rei de la India, envidioso de que *Ardschir* rei de los Persas, habia inventado el juego del *Chaquete*, tenía un hijo tan abandonado en sus costumbres que apenas se mantenía en el palacio.

Con tal motivo, despues de haber empleado toda clase de correctivos sin conseguir ningun provecho, llamó á uno de sus vasallos para que proporcionase al hijo un entretenimiento que lo hiciera prescindir de sus ilusiones é inquietudes. A Sessa tocó en suerte cumplir los deseos del Rei, i al efecto inventó el juego que se conoce con el nombre de *Ajedrez*, el cual produjo tan buenos resultados, que el Rei plenamente satisfecho dijo á Sessa, que pidiera la recompensa que gustase, i este le respondió, que se contentaba con que le diera un grano de trigo por la primera casilla del tablero, 2 granos por la segunda i así sucésivamente duplicando la cantidad hasta completar las 64 casillas

del tablero. El Rei, creyendo que era mui poca cosa lo que se le pedia dijo á Sessa: "Mas hubiera pedido un niño de escuela;" pero insistiendo Sessa en que con solo esa recompensa quedaría más que satisfecho, mandó el Rei que se diese lo que pedia. Se pusieron pues los Ministros á contar los granos de trigo, i apenas habian llegado á la cuarta parte del número de casillas, cuando observaron que lo que Sessa pedia era una cantidad tan grande de trigo, que no la habia en todos los Estados de la India. Admirado el Rei de tan extraño suceso, confesó avergonzado que no tenía como pagar á Sessa i que le daría otro premio diferente.

La cantidad de trigo que se pedia en efecto, pasaba de 80 billones de quintales, valuados en mas de 400 billones de pesos á 5 pesos el quintal.

Para contar este dinero se necesitarían mas de 253 mil hombres contando cada uno 86400 pesos diarios por espacio de 50 años.

Con esa cantidad se podrian cargar mas de un millon de buques de mil toneladas cada uno. Se podrian dar á la Tierra mas de 379 mil vueltas colocando los pesos fuertes unos á continuacion de los otros; i finalmente, repartiendo ese dinero entre todos los habitantes del mundo tocarían á cada uno mas de 287000 pesos.

Se comprende que Sessa propuso este admirable problema valiéndose del auxilio de las progresiones.

Sábese tambien con seguridad, que todos los pueblos antiguos del oriente á excepcion de la China i una Nacion de Tracia acostumbraban contar de diez en diez, atribuyendo la invencion de este sistema á los Indianos quienes sin duda hicieron derivar su teoría de la conformacion de la mano del hombre.

A Eratóstenes, orador, poeta i profundo Matemático que floreció en Ejipto 240 años antes de Jesucristo; que fué custodio de la Biblioteca de los Ptolomeos i tuvo la gloria de ser el primero que dió á conocer la magnitud de la Tierra, se debe la primera invencion de la *aritmética instrumental* que consistía en un tablero de números impares con la série de divisores compuestos i comunes para investigar los divisores primos. A él se debe la regla que se llama "*Criba*"

de su nombre, i que se emplea para formar una tabla de números primos.

200 años antes de Jesucristo, Nicómaco llamado "*el aritmético*" se hizo célebre por haber traducido, ilustrado i comentado todo cuanto sabian los Griegos acerca de la Aritmética: inventó además el *número poligono*, llamado así, la suma de términos de una progresion por diferencia que comienza por 1 i cuyas unidades combinadas forman diferentes figuras jeométricas.

Publicó tambien dos obras: una titulada *Theologúmena arismética* en que exponia las relaciones misteriosas de los números, i otra titulada *Isagoge arismética* que contenía las propiedades i divisiones de los números siguiendo las teorías pitagóricas.

Despues de Boecio que compendió i tradujo las obras de Nicómaco, el mejor aritmético que tuvieron los latinos fué el célebre Beda, quien á principios del siglo VIII pudo dar instrucciones para investigar los conocimientos aritméticos de los antiguos, i explicó la *Datilonomia* ó sea el arte de contar por las situaciones i falanjes de nuestros dedos.

El año de 1400 Manuel Mascópulo aritmético griego, hizo otra célebre aplicacion de las progresiones, inventando su *cuadrado májico* que era un cuadro de progresiones dispuestos de tal modo que las sumas de las columnas, horizontal, vertical i diagonal eran iguales.

En cuanto á los signos de que se valian los antiguos para representar los números, debe manifestarse: que los Ejipcios, Griegos, Hebreos, los Latinos i demás Naciones del Asia se valian de las letras de su alfabeto, lo cual era bastante molesto para los cálculos aritméticos. Pero en el siglo VIII los árabes aprendieron de los Indianos los caracteres de que hoi nos valemos, i que se conocen con el nombre de cifras arábigas. Estas cifras fueron introducidas en España por los Sarracenos en el siglo X i en Francia por un Monje llamado *Gilberto* que despues fué Papa con el nombre de Silvestre II. Con todo, las cifras arábigas no fueron adoptadas por la jeneralidad de los pueblos sino á principios del siglo XVI.

Ahora, la opinion más verosímil acerca de cómo se llegaron á formar dichas cifras es la siguiente: sin duda que el número uno se representó en un principio por medio de una rayita vertical: el número dos por dos rayitas horizontales: el número tres por tres rayitas i así sucesivamente. Visto que no dejaba de ser un poco incómodo poner tanta raya para representar los números se pensó juntar las rayitas formando ángulos, así que los números dos i tres por ejemplo se representaban por > i ∠. Este método no presentó aún muchas ventajas i se pensó mejor combinar las líneas rectas con las curvas formándose el dos con un semicírculo i una recta en su extremo inferior; el cinco con un semicírculo i un rasguito por arriba; el seis con un círculo i una colita arriba; el ocho con dos círculos colocados uno sobre otro; el nueve por un seis invertido i el cero por una circunferencia.

La forma que así tomaron las cifras fué mucho más cómoda i mas simpática, i de dia en dia se han venido perfeccionando con los progresos de la tipografía.

La idea de dar á las cifras dos valores: el uno absoluto i otro relativo ó de posicion se debe tambien á los Indianos.

El año de 1520, *Lúcas Pacciol del Burgo del Santo Sepulcro*, introdujo en Italia su Pátria, los adelantos que aprendió en el Oriente acerca de los números, debidos á la facilidad con que se resolvian ya las operaciones haciendo uso de las cifras arábigas.

Publicó al efecto en 1523 una obra titulada *suma de aritmética, geometría, proporciones i proporcionalidad*, i entre sus curiosidades contenía las reglas de falsa posicion llamadas por él *reglas de Elcalaino.*

Por los años de 1460 hubo un hábil Matemático llamado *Juan Muller ó Régio Montano*, orijinario de Konisberg en Franconia, á quien se atribuye la invencion de los decimales, con lo cual tomaron mayor vuelo los progresos de la Aritmética. La obra publicada por él se llamó *Aritmética decimal*, i evitaba los inconvenientes de los quebrados ordinarios.

Poco despues de inventado el cálculo de los decimales, se hicieron por Juan Neper ó Nepero, Geómetra Escocés, dos importantes descubrimientos: el pri-

mero i el mas notable de todos fué la invencion de los logaritmos con los cuales redujo la multiplicacion á una suma, la division á una resta, la elevacion á potencias á una multiplicacion i la extraccion de raices á una division, operándose así una mejora positiva i trascendental en todos los ramos de las ciencias exactas.

Enrique Briggs, alumno de Neper prosiguió la obra de su docto maestro, i el año de 1624 dió á luz su *Aritmética logarítmica*, en la que por primera vez aparecieron unas tablas que contenían los logaritmos de los números enteros desde 1 hasta 20000, i desde 90000 hasta 101000.

El segundo descubrimiento de Neper fué una Aritmética denominada *Rabdología*, en la cual hacia la descripcion de una máquina que, por medio de ciertos palitos en forma de parámides rectangulares, combinados injeniosamente i constando cada uno de una parte de la tabla pitagórica, se resolvian las principales operaciones de la Aritmética.

La máquina de Neper, fué mejorada: por Monsieur Petit, que intentó convertir el tambor de los órganos en máquina de calcular; por Roussain en 1770; por Pascal que halló el medio de mover los palitos valiéndose de ruedas i de algunas pesas; por Grillet que suprimió el tambor i las pesas i combinó los palitos de modo que movidos sobre unas ruedas hacian las operaciones; por Leibnitz, por Perrault, i por otros intelijentes matemáticos, que estimulados con el invento de Neper, han secundado las ideas de este ilustre Escocés.

Se cuenta tambien que *Monsieur Sanderson*, profesor de Matemáticas en Cambrigue i ciego desde la edad de un año, inventó el medio de que los ciegos aprendiesen á calcular. Construyó al efecto un tablero enrejado de líneas paralelas que formaban cuadrados iguales, i en los agujeros que habia en el ángulo de estos cuadrados colocó alfileres de distinto tamáño, de modo que pudieran distinguirse con el simple tacto.

Como una de las propiedades admirables de las progresiones, inventó el Ingles Walis su *Aritmética de*

los infinitos, por medio de la cual sumaba los términos de una série compuesta de infinitas cantidades, i determinaba facilmente las áreas i los volúmenes.

En 1664, el matemático Pascal hizo otra aplicacion injeniosa de las progresiones, inventando al efecto su *Triángulo aritmético*, que consistía en la reunion de dos progresiones una por diferencia i otra por cociente dispuestas en forma de triángulo, segun el cual, con un número que se ponia en el vértice podian formarse todos los números figurados i practicarse sin muchos esfuerzos las combinaciones de los números.

Siguiendo Weigel, profesor de Matemáticas en Ginebra la idea de Aristóteles, creyó facilitar los cálculos empleando solamente cuatro cifras 0, 1, 2 i 3. Con tal objeto publicó en 1687 su *aritmética tetráctica* denominada así por emplearse el *Tetractys* ó *número cuatro* que tanto respetaban los Pitagóricos, i segun ella podia resolver las mismas operaciones que se hacian con las diez cifras arábigas.

Poco despues el inmortal Leibnitz, jeneralizó el principio de la numeracion décupla i en 1702 presentó á la Academia de ciencias de Paris su *Aritmética binaria*, en la cual demostraba: que así como se podian emplear tres, cuatro ó mas cifras para representar los números, bastaban solo dos, el 0 i el 1. En apoyo de esta opinion, los profesores Lagni i Dagincut publicaron algunos trabajos, haciendo ver que con el sistema binario se encontraban facilmente las fórmulas ó leyes de las progresiones i se evitaban algunas dificultades que ocurrian en los logaritmos.

En 1684, *Lord Brouncker*, presidente de la Sociedad Real de Londres, inventó las *fracciones contínuas* atribuyéndose no obstante las ventajas i el descubrimiento de sus propiedades, á *Huygens*, *Euler*, *Legendre*, *Lagrange*, *Wronski*, i otros notables matemáticos.

Entre las muchas denominaciones que se daban por los antiguos á la Aritmética, hai una particular que llama la atencion, i es la que se conocía con el nombre de *Aritmética divinatoria*. Los cálculos á que esta Aritmética se refiere, sirven mas bien para distraer que para instruir, pues como podrá observarse, son meramente juegos de números, que consisten en

encontrar cierto resultado cuyo valor se enuncia ya en la cuestion con algun disfraz para entretener la atencion del calculador.

Así por ejemplo, si se quiere saber entre una reunion de personas, cual de todas tiene una sortija que de antemano hayan escondido, basta que á una de las personas que escondieron dicha sortija, se le diga que practique en secreto la operacion siguiente:

1.° Duplicar el número ordinal de la persona que tenga la sortija agregando 5 al producto.

2.° Multiplicar esta suma por 5, i agregar 10 al producto.

3.° Agregar á esta otra suma el número 2 si lo sortija está en la mano izquierda i 1 si está en la derecha, multiplicando por 10 el resultado.

4.° Agregar á este producto el número ordinal del dedo en que esté la sortija comenzando á contar por el pulgar, multiplicando esta suma por el número 10.

5.° Agregar á este producto el número de la articulacion en que esté la sortija más el número 35.

La persona que trata de averiguar quien tiene la sortija pide solamente esta ultima suma, á la cual agregará 3535; i entónces la primera cifra de la izquierda del resultado, indica el número ordinal en que está la persona con la sortija; la 2.ª indicará la mano; la 3.ª el número del dedo i la 4.ª el número de la articulacion.

Por el estilo de este juego que tan agradable parece ser, son todos los demás que corresponden á la Aritmética divinatoria de los antiguos.

Para conducir este lijero bosquejo histórico de la Aritmética, es conveniente manifestar: que el invento mas importante i quizás el mas trascendental que se hizo á fines del siglo pasado perfeccionándose á principios del presente, fué el del *Sistema Métrico decimal* siendo á la Francia á quien tocó la gloria de haberlo descubierto, prestando un gran servicio á las Naciones todas de la Tierra, que encuentran en dicho sistema, un medio fácil i provechoso de estrechar sus ideas é intereses mercantiles, i de hacer mas espeditos i uniformes los cálculos númericos en sus múltiples i variadas combinaciones.

ARITMÉTICA.

INTRODUCCION.

Definicion de Matemáticas, de cantidad, de número, de unidad, de Aritmética, de axioma, de teorema, de lema, de problema, de postulado, de corolario.

1. *Matemáticas* son las ciencias que tienen por objeto el estudio de las leyes del tiempo i del espacio, *ó bien:* son las ciencias exactas que tratan de la cantidad.

2. *La palabra Matemáticas* se deriva de la griega *Mathematikos*, cuyo adjetivo se forma de la palabra *mathêma*, que significa *la ciencia*, *la instrucción por excelencia*.

3. *Las Matemáticas* constituyen actualmente el principio de casi todo estudio científico: con dificultad se encuentran fenómenos ó teorías físicas i químicas que no estén fundadas en las ciencias exactas: ellas componen en efecto el órden mas completo de verdades á que ha llegado el saber humano, i no tienen su base movible, cual otras ciencias que admiten opiniones diversas i discusiones varias. Las proposiciones matemáticas, van acompañadas siempre de la certidumbre absoluta, i poseen en alto grado las cualidades de ser demostrables, fundadas, i enteramente conformes á la razon.

4. *Las Matemáticas se dividen* en puras i mixtas. Son *puras* las que tratan de la cantidad en abstracto.

i *mixtas* las que tratan de la cantidad considerada en los cuerpos ó en sus propiedades.

5. *Las Matemáticas puras* se dividen en tres grandes partes, que son: *Aritmética* ó ciencia de los números; *Aljebra* ó ciencia de las leyes jenerales de la cantidad, i *Jeometría*, ó ciencia de la extension. Estas tres ciencias toman el nombre de *Matemáticas elementales*, i los Cálculos *integral* i *diferencial*, se distinguen con el de *Matemáticas superiores* ó *sublimes*.

6. *Las Matemáticas mixtas* se dividen en dos grandes secciones: la primera aplica la ciencia de la cantidad abstracta á la naturaleza, i la segunda á los objetos del arte.

A la primera seccion corresponden: la Astronomía, la Acústica, la Mecánica, etc., i en jeneral todas las ciencias llamadas *físico-matemáticas;* i á la segunda, la Navegacion, la Arquitectura, la Fortificacion, la Agrimensura, la Jeodésia, la Cronolojía, la Balística, etc.

Las Matemáticas *mixtas*, llámanse tambien *Matemáticas aplicadas*.

7. *Cantidad en jeneral*, es todo aquello capaz de aumento ó disminucion, como el tamaño de los cuerpos, un dolor, una pasión, etc.

De una manera mas concreta, se dice en Matemáticas, que *Cantidad*, es todo aquello que puede representarse exácta ó aproximadamente con números.

Las Matemáticas se ocupan, pues, de la cantidad que es susceptible de contarse, pesarse ó medirse, prescindiendo de aquellas que, como *un dolor*, *una pasión*, *la sed*, etc., no pueden compararse con otras de su misma especie.

8. *La cantidad se divide* en discreta ó numerable, contínua ó figurada, é intensiva.

Discreta ó numerable, es aquella cuyas partes que la componen están separadas, como un ejército, una porcion de monedas, etc.

Contínua ó figurada, es aquella cuyas partes que la componen están íntimamente unidas. como la superfície de un terreno, el grueso ó largo de los cuerpos, una piedra, etc.

Intensiva, es aquella que significa causa de movimiento, ó que consiste en las fuerzas de la natura-

leza, como la velocidad de la luz, la fuerza del vapor, etc.

9. *Medir una cantidad*, es compararla con otra de la misma especie que se determina de antemano. Así por ejemplo, cuando medimos el peso de un cuerpo, no se hace otra cosa sino comparar el peso de otro cuerpo mas grande ó mas pequeño, con el del cuerpo dado, i ver cuántas veces el peso del uno contiene ó está contenido en el del otro.

10. *Unidad* es la cantidad que se elije para que sirva de término de comparación respecto de las demás cantidades de su misma especie, como un hombre, una flor, una docena de botones, un escuadrón de soldados, etc.

11. *Número* es el resultado de comparar la cantidad con la unidad.

12 *La cantidad respecto de la unidad*, puede ser de tres modos: mayor, menor ó igual; i al ser mayor, puede suceder que la unidad esté ó nó contenida en ella un número exácto de veces.

13. *El número se divide* en entero, quebrado, mixto, abstracto, concreto, complejo, incomplejo, par, impar, díjito, compuesto por sus cifras, primo i múltiplo. Tambien hai números homojéneos i heterojéneos, comensurables é incomensurables.

Número entero, es toda unidad sola, ó la reunion de unidades de una misma naturaleza, como un libro, cuatro pesos, diez años, etc.

Número quebrado ó *fraccion*, es el que expresa una parte ó varias partes iguales de la unidad, como un quinto de peso, seis octavos de año, etc.

Número mixto, es el que consta de entero i quebrado, como dos dias i medio, tres pesos i cuarto, etc.

Número abstracto, es el que no expresa la especie á que se refiere, como cuatro, quince, etc.

Número concreto, es el que expresa la especie á que se refiere, como cuatro casas, quince hombres, etc.

Número complejo, es el que consta de unidades de diferentes especies; pero relativas todas á una misma clase de medida, como dos años, cinco meses, tres dias, cinco horas, etc.

Hai complejos de lonjitud, de pesantez, de capaci-

dad, de superficie, de volúmen, de moneda, de tiempo y de circunferencia, es decir, de tantas clases cuantas clases de medidas existen.

Número incomplejo, es el número concreto que se refiere á una sola especie de medida, como dos pesos, cinco metros, etc.

Hai tantas clases de números incomplejos, cuantas son las de los números complejos.

Numero par, es el que tiene mitad entera, como ocho, seis, etc.

Número impar ó *nones*, es el que no tienen mitad entera, como tres, cinco, siete, etc.

Número díjito, es el que se representa con una sola figura.

Los números díjitos, son: uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho i nueve, que se representan respectivamente, como sigue;

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Número compuesto por sus cifras, es el que consta de dos ó mas figuras, como diez, once, doce, etc., i en jeneral todos los números enteros mayores que nueve, los cuales se representan como sigue;

10, 11, 12, 13, 14, 15, ...

Número primo, es aquel que no puede dividirse exactamente mas que por sí mismo i por la unidad, como cinco, once, etc.

Número múltiplo, es aquel que puede dividirse exactamente por otro ú otros números distintos de él mismo i la unidad, como cuatro, diez, nueve, etc.

Números homojéneos, son los que expresan unidad de la misma especie, como dos pesos, ocho pesos, cinco pesos, etc.

Números heterojéneos, son los que expresan unidades de diferentes especies, como dos pesos, ocho metros, cinco minutos, etc.

Números comensurables ó *racionales*, son aquellos que tienen con la unidad una relacion exactamente determinada, como los enteros y quebrados.

Números inconmensurables, *inefables*, *sordos* ó

irracionales, son aquellos que no tienen con la unidad una relacion exactamente determinada, como son las raices inexactas de los números.

14. *Aritmética*, es la ciencia de los números.

La voz Aritmética se deriva etimolójicamente de la palabra griega *aritmos*, que significa *número*.

15. *La necesidad é importancia* del estudio de la Aritmética, son inmensas: por medio de ella, pueden los individuos conocer el conjunto de sus intereses, i manejarlos de una manera fácil, segura i productiva.

16. *Dieron oríjen á la Aritmética*, las reglas i cálculos que fué precíso perfeccionar i descubrir para efectuar las operaciones comerciales, desde que el simple cambio de unas cosas por otras, como se verificaba en un principio, hizo necesaria la invencion de la *moneda*, con lo cual se volvieron mas complicadas las compras, ventas, i en una palabra, mas grandes los intereses mercantiles de los pueblos.

17. *La Aritmética, por su extension* puede ser elemental i superior ó demostrada.

Es elemental, cuando solo contiene las reglas para efectuar practicamente las operaciones, i es demostrada, cuando además de contener tales reglas, explica á la vez sus fundamentos i su oríjen.

18. *Axioma* es una verdad tan evidente, que no necesita demostrarse.

Los principales axiomas de que nos valemos en Aritmética, son los siguientes:

1.° Todo número es igual á sí mismo.

2.° Todo número puede reemplazarse por otro que le sea igual.

3.° Dos ó mas cantidades iguales á otra, son iguales entre sí.

4.° Dos ó mas cantidades equivalentes á otra, son equivalentes entre sí.

5.° El conjunto de las partes, es igual al todo.

6.° El todo es mayor que cualquiera de sus partes.

7.° Si con cantidades iguales se hacen operaciones iguales, los resultados son iguales.

8.° Si con cantidades iguales se hacen operaciones desiguales, los resultados son desiguales.

9.° Si con cantidades desiguales se hacen operacio-

nes iguales, los resultados son desiguales.

19. *Teorema* es toda verdad que necesita demostrarse.

Todo teorema consta de tres partes, que son: *hipótesis, tésis* i *demostración.*

Hipótesis es lo que sirve de dato á la demostración; *tésis* lo que expresa la verdad demostrable, i *demostración* es el razonamiento mediante el cual se hace ver la verdad de una proposicion.

20. *Los teoremas se dividen* en directos i recíprocos. Teorema directo es aquel cuyas partes no están enunciadas en órden inverso respecto de otro, i recíproco es aquel que tiene por tésis la hipótesis de otro i viceversa.

Es de advertir, que no siempre que un teorema directo es cierto, su recíproco debe serlo tambien.

21. *Las demostraciones* pueden ser *inmediatas, mediatas, directas é indirectas ó* ad absurdum.

Demostración inmediata es la que considera como principio ó fundamento una verdad evidente por sí misma.

Demostración mediata es la que considera como fundamento una verdad que se hizo evidente por medio de otros principios.

Demostración directa es aquella que hace ver la certeza del enunciado, fundándose en la relación que éste tiene con un principio verdadero.

Demostración indirecta ó ad absurdum, es aquella que hace ver la certeza del enunciado, fundándose en el absurdo ó contradicción que habria con la hipótesis, si se admitiese no ser cierta la tésis.

22. *Problema* es una cuestión en que se suponen ciertas cantidades conocidas, llamadas *datos*, para que por su medio se encuentren una ó mas cantidades desconocidas, llamadas *incógnitas.*

Resolver un problema es determinar la incógnita ó incógnitas por medio de las cantidades conocidas.

Solución de un problema es la série de operaciones que deben hacerse para encontrar el número ó números desconocidos que se buscan.

A veces se llama solución de un problema, el valor de la incógnita ó incógnitas que satisfacen á las condi-

ciones de la cuestión.

En un sentido menos riguroso, se dá el nombre de problemas, á las cuestiones particulares que se proponen como ejemplos ó aplicaciones prácticas de las reglas.

23. *Se dá el nombre de lema* á un teorema que debe anteponerse á otro para facilitar su demostración.

24. *Se llama postulado* toda verdad evidente que tiene carácter práctico, i que indica la posibilidad de hacer alguna cosa.

Así, por ejemplo, será postulado la expresión siguiente: *en vez de un quintal pueden tomarse cuatro arrobas ó cien libras.*

25. *Se llama corolario* toda verdad que se deduce como consecuencia de un axioma, de un teorema ó de un razonamiento.

Los corolarios requieren por regla jeneral demostracion, excepto en aquellos casos en que se deducen de un modo tan claro i fácil, que se hacen evidentes por sí mismos.

NUMERACION.

26. *Numeracion* es la parte de la Aritmética, que enseña á formar i á expresar los números.

Los números pueden expresarse de dos modos: por medio de la palabra i por medio de la escritura.

El arte de expresar los números con palabras se llama *numeracion oral, hablada ó verbal;* i el arte de expresar los números por medio de la escritura, empleando caracteres convencionales, se llama *numeracion escrita.*

27. *Cifra* es la nota, figura ó carácter particular con que se representa algun número.

Guarismo es todo número, ya se componga de una ó de mas cifras. Segun esto, en nna cantidad de doce cifras, por ejemplo, hai *doce* guarismos de una cifra: *seis* de á dos; *cuatro* de á tres; *tres* de á cuatro; *dos* de á cinco; *dos* de á seis, i *uno* de á siete, de á ocho, de á nueve, de á diez, de á once i de á doce cifras.

28. *Sistema de numeración*, es el conjunto ordenado de cifras que sirven para expresar los números.

La necesidad de los sistemas de numeracion, proviene de la dificultad que habria si cada número se representára i expresáse con una palabra i una cifra distintas; porque siendo ilimitada la série de los números, tendríamos qué aprender un número infinito de voces i de caracteres para designarlos, lo cual es absolutamente imposible.

Base de un sistema de numeración, es el número de cifras que lo constituyen.

Todos los números posibles pueden representarse con cualquier número de cifras, con tal que sean dos por lo menos i el cero una de ellas. De aquí se sigue que hai diferentes sistemas de numeración, conocidos con los nombres de *binario*, *ternario*, *cuaternario*, *quinario*, *de base seis*, *de base siete*, *de base ocho*, *de base nueve*, *de base diez* ó *décuplo*, *de base once* ú *oncenario*, *de base doce*, *duodecimal* ó *docenario*, *de base trece*, etc., segun el número de cifras que se empléen.

Cuando la base de un sistema sea mayor que *diez*, entónces se acostumbra representar las cifras contadas desde *diez* inclusive en adelante, por las letras *a*, *b*, *c*, *d*, etc. del alfabeto castellano.

29. *Jeneración de los números.*—La formación de los números se verifica por medio de la agregación sucesiva de unidades: de modo que si al número *uno* se añade *uno*, al resultado obtenido otro *uno*, i así en adelante, llegarémos á tener números cada vez mas grandes que los anteriores; i como por grande que supongamos un número, siempre puede encontrarse otro mayor mediante la agregación de unidades, se sigue *que la série de los números es ilimitada.*

30. *El sistema de numeración* jeneralmente adoptado en casi todos lospaises, es el *décuplo*, *de base diez* ó *decenario*, habiéndose preferido la elección de este sistema, quizás por estar de acuerdo con la conformación de nuestra mano, á donde recurrimos naturalmente cuando pequeños, para efectuar nuestras sencillas cuentas.

Tratarémos, pues, de la numeración hablada i escrita en este sistema.

31. *Numeración hablada*, *verbal ú oral.*—Las pa-

labras con que se designan los números, son las siguientes:

Desde uno á diez,

Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, *diez*, *ó decena.*

Desde diez á cien,

Diez i uno, ú once, diez i dos, ó doce, diez i tres, ó trece, diez i cuatro, ó catorce, diez i cinco, ó quince, diez i seis, diez i siete, diez i ocho, diez i nueve, diez i diez, ó *veinte.*

Agregando á *veinte* sucesivamente los diez primeros números, resulta:

Veinte i uno, veinte i dos, veinte i tres, veinte i cuatro, veinte i cinco, etc., hasta *veinte i diez*, *ó treinta.*

Agregando á *treinta* sucesivamente los mismos diez primeros números, resulta:

Treinta i uno, treinta i dos, treinta i tres, treinta i cuatro, treinta i cinco, etc., hasta *treinta i diez ó cuarenta.*

De un modo análogo, se formarían:

Cuarecta i nno, cuarenta i dos, etc., hasta *cuarenta i diez* ó *cincuenta.*

Cincuenta i uno, cincuenta i dos, etc., hasta *cincuenta i diez* ó *sesenta.*

Sesenta i uno, sesenta i dos, etc., hasta *sesenta i diez* ó *setenta.*

Setenta i uno, setenta i dos, etc., hasta *setenta i diez* ú *ochenta.*

Ochenta i uno, ochenta i dos, etc., hasta *ochenta i diez* ó *noventa.*

Noventa i uno, noventa i dos, etc., hasta *noventa i diez* ó *cien*, *ó centena.*

Desde cien á mil.

Agregando á cien, sucesivamente los *cien* primeros números, resulta:

Ciento uno, ciento dos, etc., hasta cien i cien ó *doscientos.*

Agregando á *dos cientos* los mismos *cien* primeros números, resulta:

Dos cientos uno, dos cientos dos, etc., hasta dos cientos i cien, ó *tres cientos*.

De un modo análogo se formarían:

Tres cientos uno, tres cientos dos, etc., hasta tres cientos i cien ó *cuatrocientos*.

Cuatrocientos uno, cuatrocientos dos, etc., hasta cuatrocientos i cien ó *quinientos*.

Quinientos uno, quinientos dos, etc., hasta quinientos i cien ó *seiscientos*.

Seiscientos uno, seiscientos dos, etc., hasta seiscientos i cien ó *setecientos*.

Setecientos uno, setecientos dos, etc., hasta setecientos i cien ú *ochocientos*.

Ochocientos uno, ochocientos dos, etc., hasta ochocientos i cien ó *novecientos*.

Novecientos uno, novecientos dos, etc, hasta novecientos i cien ó *mil*, ó *millar*.

Desde mil á un millón.

Agregando á mil, sucesivamente los mil primeros numeros, resulta:

Mil uno, mil dos, etc., hasta mil i mil ó *dos mil*.

Agregando á dos mil, los mil primeros números, resulta:

Dos mil uno, dos mil dos, etc., hasta dos mil i mil ó *tres mil*

De un modo análogo se formarian:

Cuatro mil, cinco mil, etc,, hasta mil miles ó *un millón*.

Desde un millón en adelante.

Agregando á un millón sucesivamente el primer millón de números anteriores, resulta:

Un millón uno, un millón dos, etc, hasta millón i millón ó *dos millones*.

Agregando á dos millones el mismo millón de números encontrados, resulta:

Dos millones uno, dos millones dos, etc., hasta dos millones i millón ó *tres millones*.

De un modo análogo se formarian:

Cuatro millones, cinco millones, etc., hasta un millón de millones ó *un billón.*

Agregando á un billón el primer billón de números anteriores, resulta:

Un billón uno, un billón dos, etc., hasta un billón i billón ó *dos billónes.*

Agregando á *dos billones* el mismo primer billón de número anteriores, resulta:

Dos billones uno, dos billones dos, etc., hasta dos billones y billón ó *tres millones.*

De un modo análogo se formarían:

Cuatro billones, cinco billones, etc., hasta un millón de billones ó *un trillón.*

Continuando de la misma manera llegarémos á tener un *cuatrillón*, *un quillón*, i así hasta donde se quiera.

32. *La numeración hablada* está fundada en el principio de que: diez unidades de órden inferior componen una del órden inmediato superior.

Los diferentes órdenes, son:

de 1.° unidad simple.
de 2.° decena ó diez.
de 3.° centena ó cien.
de 4.° unidad de millar ó mil.
de 5.° decena de millar ó diez mil
de 6.° centena de millar ó cien mil.
de 7.° unidad de millón.
de 8.° decena de millón ó diez millones.
de 9.° centena de millón ó cien millones
de 10.° unidad de millar de millón ó mil millones.
de 11.° decena de millar de millón ó diez mil millones.
de 12.° centena de millar de millón ó cien mil millones, i así sucesivamente.

En cualquiera otro sistema de numeracion distinto del décuplo, se verifica: que cada unidad de órden superior contieue tantas del órden inmediatamente inferior, como unidades tiene la base del sistema. Así, por ejemplo, en el sistema ternario, *tres* unidades de primer órden forman una de segundo; *tres* de segundo una de tercero; *tres* de tercero una de cuarto, etc.

De lo expuesto, resulta: que con solo las trece pala-

bras: *uno*, *dos*, *tres*, *cuatro*, *cinco*, *seis*, *siete*, *ocho*, *nueve*, *diez*, *cien*, *mil*, *millon*, i sus modificaciones, pueden enunciarse todos los números posibles en el sistema décuplo.

33. *Numeración escrita.*—Las cifras que se emplean para escribir los números, son:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, que se léen: cero, uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve.

Para comprender cómo con solo diez cifras pueden escribirse todos los números, se há convenido en darlas dos valores: uno *absoluto* i otro *relativo* ó *de posición*.

Valor absoluto de una cifra es el que tiene por sí sola, i *valor relativo ó de posición*, es el que tiene por el lugar que ocupa.

Segun esto, toda cifra que ocupa el primer lugar de la derecha expresa *unidades simples*, la que ocupa el segundo lugar hácia la izquierda expresa *decenas*, la que ocupa el tercer lugar expresa *centenas*, i así sucesivamente, conforme se indica en seguida:

Unidad.
Decena.
Centena.
Unidad de millar.
Decena de millar.
Centena de millar.
Unidad de millon.
Decena de millon.
Centena de millon.
Unidad de millar de millon.
Decena de millar de millon.
Centena de millar de millon.
Unidad de billon.
Decena de billon.
Centena de billon.
Unidad de millar de billon.
Decena de millar de billon.
Centena de millar de billon.
Unidad de trillon.
Decena de trillon
Centena de trillon.
Unidad de millar de trillon.
Decena de millar de trillon.
Centena de millar de trillon.
Unidad de cuatrillon.
Decena de cuatrillon.
Centena de cuatrillon.
Unidad de millar de cuatrillon.
Decenas de millar de cuatrillon.
Centenas de millar de cuatrillon.
Unidad de quinto.
Decena de quinto.
Centena de quinto.

La cifra cero, es el símbolo de la *nada*, pues no se le supone ningun valor, i solo sirve para indicar en los números la falta de algun órden de unidades. Así en el número 7405 denota que no hai *decenas;* en 7045 denota que no hai *centenas*.

34. *La numeración escrita* se funda en el principio de que: toda cifra colocada á la izquierda de otra, ex-

presa unidades *diez* veces mayores que ésta otra. Segun esto, los millares expresan unidades *diez veces* mayores que las centenas: las centenas, unidades *diez veces* mayores que las decenas, etc.

En cualquier otro sistema distinto del décuplo se verifica: que cada cifra colocada á la izquierda de otra, expresa unidades tantas veces mayores que ella, como indica la *base* del sistema. Así, por ejemplo, en el número 432, suponiéndolo escrito en el sistema quinario, el 4 expresa unidades *cinco* veces mayores que el 3, i el 3, unidades *cinco veces* mayores que el 2.

35. *Para escribir* un número entero, colóquense de izquierda á derecha las cifras que se dicten, unas á continuación de otras, comenzando por las de órden superior, i póngase *cero* en los lugares que no estén ocupados por cifras significativas.

Para leér ó enunciar un número que esté escrito, divídase en porciones de tres en tres cifras, de derecha á izquierda, poniendo al concluir la primera porcion un punto, al concluir la segunda un pequeño 1, al concluir la tercera un punto, al concluir la cuarta un pequeño 2, i así sucesivamente poniendo punto i 3, punto i 4, etc.

Estas anotaciones se ponen entre una i otra porción por la parte inferior.

El punto léase *mil*, i el 1, 2, 3, 4, etc., léanse respectivamente: *millon*, *billon*, *trillon*, *cuatrillon*, etc.

Para leer, por ejemplo, el número siguiente: 7456009521642083, divídase segun la regla, i resulta así: $7.456_2009.521_1642.083$, i su enunciado es: siete *mil* cuatrocientos cincuenta i seis *billones*, nueve *mil* quinientos veintiun *millones*, seiscientos cuarenta i dos *mil* ochenta i tres unidades.

Adviértase que los ceros nunca se léen al enunciar un número.

36. *Numeración decimal.*—Numeración decimal, es aquella en que cada unidad se divide en *diez* partes iguales llamadas *décimas*, cada décima en *diez* partes iguales llamadas *centésimas*, cada centésima en *diez* partes iguales, llamadas *milésimas*, i así sucesivamente.

La numeración decimal no es mas que una conti-

nuación de la numeración de los enteros, puesto que cada unidad de órden superior, contiene igualmente *diez* del órden inferior, resultando de aquí, que los diferentes órdenes de esta numeración, son: las *décimas*, *centésimas*, *milésimas*, *diez milésimas*, *cien milésimas*, *millonésimas*, etc., los cuales se colocan como se vé en seguida:

décimas
centésimas
milésimas
diez milésimas
cien milésimas
millonésimas
diez millonésimas
cien millonésimas
mil millonésimas
diez mil millonésimas
cien mil millonésimas
billonésimas
diez billonésimas
cien billonésimas
mil billonésimas
diez mil billonésimas
cien mil billonésimas
trillonésimas
diez trillonésimas
cien trillonésimas
mil trillonésimas
etc., etc.

37. *Para escribir un número decimal*, escríbase primero la parte entera ó cero si no la hai, en seguida escríbase el signo decimal, que es una coma por lo comun invertida i por la parte superior, i despues colóquense las demás cifras supliendo con ceros los órdenes que no se expresen.

Así, por ejemplo, si se dicta el número *dos enteros, siete mil novecientas cinco diez millonésimas*, se escribirá como sigue: 2'0007905.

Para leer un número decimal, divídase de antemano, lo mismo que para leer un entero, i si el número dado tiene parte entera, léase primero ésta, agregando la palabra *enteros;* en seguida léase la parte decimal como si fuera entero, dándole á toda, la denominacion decimal de la primera cifra de la derecha.

Así, por ejemplo. el número 14'05,402.103, se leerá: catorce *enteros*, cinco millones cuatrocientos dos mil, ciento tres *cien millonésimas*.

38. *Consecuencias de la numeracion entera:*

1.ª Si á la izquierda de una cantidad entera se colocan uno ó mas ceros, la cantidad no altera.

2.ª Si á la derecha se colocan uno ó mas ceros, la cantidad se hace 10, 100. 1000, etc., veces mayor, se-

gun que se coloque uno, dos, tres, etc. ceros.

3.ª Si de la derecha de una cantidad se suprime uno ó mas ceros, la cantidad se hace 10, 100, 1000, etc. veces menor, segun que se supriman uno, dos, tres, etc. ceros,

39. *Numeración romana.*—Numeracion romana es el arte de expresar los números mediante ciertas letras mayúsculas del alfabeto castellano, á las cuales se ha dado valores numéricos particulares.

Dichas letras, son:——— I, V, X, L, C, D, M. que valen respectivamente: 1, 5, 10, 50, 100. 500, 1,000

40. *Para escribir números* con estas letras hai qué atender á las siguientes reglas:

1.ª Una letra no puede repetirse seguida más de tres veces.

2.ª Una letra de menor valor, puesta á la derecha de otra de mayor valor, hace que ésta aumente en tanto cuanto vale aquella.

Por ejemplo, la C á la derecha de la D, hace que ésta aumente en 100, i entónces DC expresa 600.

3.ª Una letra de mayor valor puesta á la derecha de otra de menor valor, hace que se disminuya en tanto cuanto ésta vale.

Por ejemplo la D á la derecha de la C, se disminuye en lo que vale C que es 100, i entónces CD expresa 400.

4.ª Las unidades simples pasan á expresar millares, colocando una recta horizontal encima de las letras correspondientes.

Así, por ejemplo, las expresiones $\overline{V}$, $\overline{\overline{V}}$. $\overline{\overline{\overline{V}}}$, significan respectivamente: 5.000, 5,000.000, 5.000,000.000.

Véase á continuacion cómo se escriben algunos números arábigos:

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	11,	12,	13,	14,	15,
I,	II,	III,	IV,	V,	VI,	VII,	VIII,	IX,	X,	XI,	XII,	XIII,	XIV,	XV

20,	30,	40,	90,	95,	99,	49,	71,	999,	499,	450,
XX,	XXX,	XL,	XC,	VC,	IC,	IL,	LXXI,	IM,	ID,	LD.

7481,	3705,	4,121.974,	1,500.409
VIICDLXXXI,	MMMDCCV,	$\overline{\overline{IV}}$CXXI CMLXXIV,	MDCDIX.

Los números romanos se usan mui poco, i se em

plean jeneralmente en la carátula de los relojes, en la numeracion de los capítulos i pájinas de los libros, en las fechas, i como números ordinales.

41. *Signos Empleados en la Aritmética:*

+ que se lée *mas.*

— ,, ,, ,, *menos.*

× ó . ,, ,, ,, *multiplicado por.*

: ó ÷ ,, ,, ,, *dividido por.*

± ó ∓ ,, ,, ,, *mas menos ó menos mas*, i se llaman *signos de ambigüedad.*

——— ó ( ) que se llaman respectivamente *vínculo ó paréntesis*, i sirven para indicar que la operación de que se trata, debe hacerse con toda la cantidad que encierran.

> i < que se léen respectivamente *mayor que*, i *menor que* i se llaman signos de desigualdad.

= que se lée *igúal á*, i se llama signo de igualdad.

En toda desigualdad ó igualdad, debe haber dos cantidades que se llaman *miembros*. La de la izquierda del signo se llama *primer miembro*, i la de la derecha *segundo miembro.*

√ que se llama radical.

Un pequeño número á la derecha i en la parte superior de otro, como por ejemplo el 3 en la siguiente expresión 40^3 se llama *exponente.*

CALCULO DE LOS NUMEROS ENTEROS.

OPERACIONES FUNDAMENTALES.

ADICION.

42.. *Llamase cálculo*, el arte de csmponer i descomponer los números.

Operaciones aritméticas son los diversos cambios i las diferentes combinaciones á que pueden sujetarse los números.

∓ ±

Las operaciones de la Aritmética se reducen á *componer* i *descomponer* los números.

Las operaciones de composicion, son la *adicion* ó *suma*, i la *multiplicacion;* i las de descomposicion, son la *sustraccion* ó *resta*, i la *division*.

43. *Adicion* ó *suma*, es la operacion por medio de la cual se forma de dos ó mas números uno solo.

Los números que se dan para sumar, se llaman *sumandos*, i el resultado de la operacion, *suma* ó *total*.

Para indicar la operacion de sumar, se usa el signo + que se coloca entre uno y otro sumando. Así por ejemplo, para indicar la suma de 5 con 7 i con 3, se pondrá: 5 + 7 + 3.

44. *Sumar números díjitos.*—Para sumar números díjitos, agréguense al primer sumando todas las unidades del segundo: á la suma que resulte, agréguense las unidades del tercero: á esta otra suma, las unidades del cuarto; y así sucesivamente.

La suma anterior, se efectuará, diciendo: 5 i 7, 12; 12 i 3, 15; luego 5+7+3=15.

45. *Tabla para sumar dos díjitos.*—La suma de los números díjitos, se facilita aprendiendo de memoria la siguiente

TABLA.

0 i 1, 1	1 i 1, 2	2 i 1, 3	3 i 1, 4	4 i 1, 5
0 i 2, 2	1 i 2, 3	2 i 2, 4	3 i 2, 5	4 i 2, 6
0 i 3, 3	1 i 3, 4	2 i 3, 5	3 i 3, 6	4 i 3, 7
0 i 4, 4	1 i 4, 5	2 i 4, 6	3 i 4, 7	4 i 4, 8
0 i 5, 5	1 i 5, 6	2 i 5, 7	3 i 5, 8	4 i 5, 9
0 i 6, 6	1 i 6, 7	2 i 6, 8	3 i 6, 9	4 i 6, 10
0 i 7, 7	1 i 7, 8	2 i 7, 9	3 i 7, 10	4 i 7, 11
0 i 8, 8	1 i 8, 9	2 i 8, 10	3 i 8, 11	4 i 8, 12
0 i 9, 9	1 i 9, 10	2 i 9, 11	3 i 9, 12	4 i 9, 13
5 i 1, 6	6 i 1, 7	7 i 1, 8	8 i 1, 9	9 i 1, 10
5 i 2, 7	6 i 2, 8	7 i 2, 9	8 i 2, 10	9 i 2, 11
5 i 3, 8	6 i 3, 9	7 i 3, 10	8 i 3, 11	9 i 3, 12
5 i 4, 9	6 i 4, 10	7 i 4, 11	8 i 4, 12	9 i 4, 13
5 i 5, 10	6 i 5, 11	7 i 5, 12	8 i 5, 13	9 i 5, 14
5 i 6, 11	6 i 6, 12	7 i 6, 13	8 i 6, 14	9 i 6, 15
5 i 7, 12	6 i 7, 13	7 i 7, 14	8 i 7, 15	9 i 7, 16
5 i 8, 13	6 i 8, 14	7 i 8, 15	8 i 8, 16	9 i 8, 17
5 i 9, 14	6 i 9, 15	7 i 9, 16	8 i 9, 17	9 i 9, 18

46. *Cuando sean bastantes* los números díjitos que se quieran sumar, puede efectuarse la operacion sencillamente, marcando con un puntito cada decena que resulte en las sumas parciales, i poniendo en la suma total, tantas decenas, cuantos puntitos hallan.

Supongamos, por ejemplo, que quieren sumarse los siguientes números: 7, 9, 8, 5, 6, 3, 4, 9 i 2. Dispondremos la operacion como se ve al márjen, i diremos:

7
9.
8.
5
6.
3
4
9.
2
——
53

7 i 9, 16: dejamos un punto al lado de 9 i llevamos 6; 6 i 8 14: dejamos un punto al lado de 8 i llevamos 4; 4 i 5, 9, i 6 15: dejamos un punto al lado de 6 i llevamos 5; 5 i 3, 8, i 4 12: dejamos un punto al lado de 4 i llevamos 2; 2 i 9, 11: dejamos un punto al lado de 9 i llevamos 1; 1 i 2, 3.

3 serán, pues, las unidades de la suma: i como hai cinco puntitos, será 5 la cifra de las decenas, de modo que la suma ó total, es 53.

47. *Para sumar* números compuestos, ó compuestos con díjitos, escríbanse unos debajo de otros, de modo que queden unidades bajo unidades, decenas bajo decenas, centenas bajo centenas, etc.

Tírese por debajo de los sumandos una línea recta para separarlos de la suma ó total.

En seguida súmense las unidades, luego las decenas, despues las centenas, i así los demás díjitos de las otras columnas, procurando: que si en la suma de unidades hai decenas, se agreguen á la suma de las decenas: si en la suma de éstas hai centenas, se agreguen á la suma de las centenas i lo mismo en los órdenes restantes de unidades.

Supongamos, por ejemplo, que se quieren sumar los siguientes números: 1478, 743, 145 i 25460. Dispóngase la operacion tal como se vé al márjen, i diremos:

1478
743
145
25460
——
27826

La suma de las unidades, segun la regla del párrafo anterior, es 16: en 16, hai una decena i sobran 6 unidades. Dejamos 6 i llevamos una decena, que agregada á la suma de las decenas dá 22 decenas: en 22 decenas hai dos centenas i sobran 2 decenas.

Dejamos 2 decenas i llevamos 2 centenas, que agregadas á la suma de las centenas, dá 18 centenas: en 18

centenas hai 1 millar i sobran 8 centenas.

Dejamos 8 centenas i se lleva 1 millar, que agregado á la suma de los millares dá 7 millares. Como en 7 millares no hai unidades de órden superior, se escriben, i á continuacion pondremos la suma que resulta en la primera columna de la izquierda. Tenemos pues, que la suma que se busca es 27.826.

48. *La suma* de números compuestos, se comienza jeneralmente por la derecha; pero cuando la suma de los números en cada columna no pasa de 9, entónces es indiferente ó tan fácil comenzar por la derecha, por la izquierda ó por cualquier columna intermedia.

La operacion siguiente presenta un ejemplo de este caso.....

	45101
	23462
	10325
	21011
Suma....	99899

49. *Para efectuar* la suma por la izquierda, colóquense las sumas que resultan en cada columna, unas debajo de otras; pero corriendo un lugar hácia la derecha, i súmense en seguida del mísmo modo por la izquierda, hasta que la suma que resulte en cada columna no pase de 9. Véase el ejemplo siguiente:

```
        9874
        6756
        8679
        9987
        6845
       .. ..
      .. ::
      38: ::
      :38::
      ::31:
      :::31
      . .. ..
      . .. ..
      3:: ::
      11: ::
       11::
         41
Suma.... 42141
```

Como se observa, es mas difícil la suma por la izquierda, ¡i por esto se comienza á efectuar siempre por la derecha.

50. *Cuando despues* de practicada una suma, queramos cerciorarnos si está bien hecha, vuélvase á repetir la operacion, sumando de abajo para arriba; pero siempre comenzándose por la derecha.

La operacion puede disponerse como se vé en el ejemplo siguiente:

	14642	Suma de abajo hácia arriba.
Sumandos	4532	
	8210	
	364	
	1536	
	14642	Suma de arriba hácia abajo.

51. *Principios acerca de la suma.*—1.° El órden de colocación de los sumandos no altera la suma.

2.° Si á uno de los sumandos se agrega una cantidad, la suma queda aumentada en esta cantidad.

3.° Si á uno de los sumandos se le resta una cantidad, la suma queda disminuida en esta cantidad.

De aqui se sigue: que para que una suma aumente, es preciso que aumente por lo menos nno de los sumandos; i para que disminuya, es preciso que disminuya por lo menos uno de los sumandos.

4.° Si á un sumando se le añade una cantidad, i al mismo sumando ó á otro se quita la misma cantidad, la suma no altera.

52. *Usos de la adicion.*—La adicion se emplea en dos casos: 1.° cuando se quiere agregar á un número otro ú otros números dados, i 2.° cuando se quiere encontrar el total de varios números de la misma especie ó del mismo jénero.

53. *Para que* los números concretos puedan sumarse, se necesita que todos sean de la misma especie. Sin embargo, pueden sumarse números de diferentes especies, con tal que se les pueda dar una denominacion comun. Por ejemplo, si en un ramo hai 11 nardos. 4 violetas i 9 rosas, resultan por todo 24 flores.

Problemas de sumar.

54. 1.° El año de 1884, asistieron á una Escuela de Injenieria 48 cursantes, á una de Medicina 158, i á una de Derecho 329, ¿Cuántos cursantes asistieron á las tres Escuelas?

2.° A 48 millones se quieren agregar 15 centenas de millar, 148 decenas de millon, i 24 decenas simples. ¿Cuánto hace por todo?

3.° Del punto A al punto B hai 148 leguas, de B á C hai 389, de C á D hai 7428 i de D á E hai 148931 leguas. ¿Cuántas leguas habrá del punto A al punto E?

4.° Un ferro-carril tiene qué recorrer una distancia en 5 horas: en la primera hora recorre 25 leguas; en la segunda 8 leguas más que en la primera; en la tercera 12 leguas más que en la segunda; en la cuarta 16 leguas más que en la tercera, i en la quinta 20 leguas más que en la cuarta. De cuántas leguas es la distancia recorrida?

5.° Un capitalista desea comprar una casa, una finca i un buque: por la casa le piden 48.597 pesos, por la hacienda 345.631 i por el buque 1,324.632. ¿Cuántos pesos le piden por las tres cosas?

SUSTRACCION O RESTA.

55. *Sustraccion ó resta* es la operacion por medío de la cual se encuentra lo que le falta á un número para ser igual á otro.

La cantidad que se va á restar se llama *minuendo*, i la que se resta *sustraendo*. El resultado de la operacion se llama *resta*, *resíduo*, *exceso ó diferencia*.

Para indicar una resta, se escribe entre el minuendo i sustraendo el signo —, que como sabemos se lée *menos*. Asi, por ejemplo, para indicar que de 15 quiere quitarse 8, pondremos 15—8.

Cuando el minuendo ó sustraendo son cantidades compuestas de dos ó mas términos precedidos del signo + ó —, entónces se indicará la operacion de restar encerrando al minuendo ó sustraendo entre paréntesis, como se vé en las siguientes ejemplos.

17 —(4+5—2)
(4+12—8)— 6
(5+ 9—1)—(4+6+2)

56. *Restar un díjito de otro.*—Para restar un díjito de otro, basta encontrar cuál es el número, que sumado con el sustraendo ó cantidad menor, produce el minuendo ó cantidad mayor. Asi, por ejemplo, la diferencia entre 9 i 4, es 5, porque 5 sumado con 4, dá 9, ó sea el minuendo.

57. *La operacion de restar*, se facilita aprendiendo de memoria la siguiente

TABLA.

2—1..1	3—1..2	4—1..3	5—1..4	6—1..5
3—2..1	4—2..2	5—2..3	6—2..4	7—2..5
4—3..1	5—3..2	6—3..3	7—3..4	8—3..5
5—4..1	6—4..2	7—4..3	8—4..4	9—4..5
6—5..1	7—5..2	8—5..3	9—5..4	10—5..5
7—6..1	8—6..2	9—6..3	10—6..4	11—6..5
8—7..1	9—7..2	10—7..3	11—7..4	12—7..5
9—8..1	10—8..2	11—8..3	12—8..4	13—8..5
10—9..1	11—9..2	12—9..3	13—9..4	14—9..5

7—1.... 6	8—1.... 7	9—1.... 8	10—1.... 9
8—2.... 6	9—2.... 7	10—2.... 8	11—2.... 9
9—3.... 6	10—3.... 7	11—3.... 8	12—3.... 9
10—4.... 6	11—4.... 7	12—4.... 8	13—4.... 9
11—5.... 6	12—5.... 7	13—5.... 8	14—5.... 9
12—6.... 6	13—6.... 7	14—6.... 8	15—6.... 9
13—7.... 6	14—7.... 7	15—7.... 8	16—7.... 9
14—8.... 6	15—8.... 7	16—8.... 8	17—8.... 9
15—9.... 6	16—9.... 7	17—9.... 8	18—9.... 9

58. *Para restar en jeneral*, escríbase el sustraendo debajo del minuendo, de modo que queden unidades bajo unidades, decenas bajo decenas, centenas bajo centenas, etc., i hecho esto, subráyense dichos números para separarlos de la diferencia que se busca.

En seguida réstense sucesivamente las cifras del sustraendo de sus correspondientes en el minuendo, comenzando por las unidades.

Si hai cifras en el minuendo, iguales á las respectivas en sustraendo, se pondrá cero como diferencia de dichas cifras.

Si alguna cifra del minuendo es menor que la respectiva del sustraendo, auméntese á la cifra del mi-

nuendo diez unidades de su órden, i considérese con una unidad ménos la cifra siguiente.

Si el minuendo termina en ceros i el sustraendo nó, considérese el primer cero con el valor de diez, los demas con el de *nueve* i la primera cifra significativa del minuendo, con una unidad menos

Finalmente, si entre dos cifras significativas del minuendo hai ceros, i la cifra de la derecha de los ceros es menor que la respectiva en el sustraendo, auméntese á dicha cifra de la derecha, diez unidades de su órden, considérese cada cero con el valor de *nueve* i la cifra significativa de la *izquierda* con una unidad menos.

59. *Propongamos* algunos ejemplos para practicar esta regla:

1.° Hallar la diferencia entre 8975 i 5432.

La operación se dispondrá como se vé al márjen i diremos:

8975 minuendo
5432 sustraendo
———
3543 Resta

5 menos 2, 3; 7 menos 3, 4; 9 menos 4, 5; 8 menos 5, 3.—La diferencia será entónces, 3 unidades+4 decenas+5 centenas+3 unidades de millar, ó lo que es lo mismo, 3543 unidades.

2.° Hallar la diferencia entre 65402 i 34401.

65402 minuendo
34401 sustraendo
———
31001 Resta

Diremos: 2 menos 1, 1; 0 menos 0, 0; 4 menos 4, 0; 5 menos 4, 1; 6 menos 3, 3. La diferencia es entónces 31001 unidades.

3.° Hallar la diferencia entre 7531 i 4729.

7531 min.
4729 sustr.
———
2802 Resta

Diremos: 1 menos 9 no puede ser, agregamos á 1 diez unidades i resultan 11; 11 menos 9, 2; 3 quedó con el valor de 2 por las 10 unidades que prestamos; 2 menos 2, 0; 5 menos 7 no puede ser; agregamos á 5 diez centenas i resultan 15; 15 menos 7, 8; 7 del minuendo quedó con el valor de 6 por las 10 centenas ó el millar que le prestamos; 6 menos 4, 2. La resta es entónces 2802.

4.° Hallar la diferencia entre 64000 i 31314.

64000 min.
31314 sustr.
———
32686 Resta

Diremos: 10 menos 4, 6; 9 menos 1, 8; 9 menos 3, 6; 3 menos 1, 2; 6 menos 3, 3. La resta será 32686.

5.° Hallar la diferencia entre 3400021 i 1346850.

3400021 min.
1346850 sustr.
———
2053171 Resta

Diremos: 1 menos 0, 1; 12 menos 5, 7; 9 menos 8, 1; 9 menos 6, 3; 9 menos 4, 5; 3 menos 3, 0; 3 menos 1, 2. La resta será entónces 2053171.

60. *Para mayor facilidad*, se comienza á restar por la derecha; pero cuando las cifras del minuendo no sean menores que las respectivas del sustraendo, entónces es indiferente ó tan fácil restar por la derecha, por la izquierda ó por cualquiera otra cifra intermedia.

La resta por la izquierda puede efectuarse como se vé en el ejemplo siguiente:

783210 min.
356452 sustr.
———
437868
. . . .
426758 Resta

Comenzando por la izquierda, diremos: 7 menos 3, 4; 8 menos 5, 3; 3 menos 6 no puede ser, quítese una unidad al 3 de la resta i queda 2; esa unidad convertida en 10 agréguese al 3 del minuendo i quedan 13; 13 menos 6, 7; 2 menos 4 no puede ser, quítese una unidad al 7 de la resta i quedan 6; esa unidad convertida en 10 agréguese al 2 del minuendo i quedan 12;12 menos 4, 8; 1 menos 5 no puede ser, quítese una unidad al 8 de la resta i quedan 7; esa unidad convertida en 10 agréguese al 1 del minuendo i quedan 11; 11 menos 5, 6; 0 menos 2 no puede ser, quítese una unidad al 6 de la resta i quedan 5; esa unidad convertida en 10 agréguese al 0 del minuendo i quedan 10; 10 menos 2, 8. Luego la resta es 426758.

61. *Para cerciorarse* si una operacion de restar está bien hecha, súmese el sustraendo con la resta i la suma debe ser igual al minuendo, ó bien: réstese del minuendo la resta i debe resultar el sustraendo. En efecto, si tenemos, por ejemplo, 15—7=8, se verifica: 7+8=15, i 15—8=7.

62. *Usos de la resta.* La operacion de restar se usa en tres casos: 1.° cuando se quiere rebajar un número de otro.—2.° cuando se quiere hallar el exceso que un

número tiene sobre otro, i 3.° cuando conocido un número i una de sus partes, se quiere encontrar la otra parte.

63. *Principios acerca de la resta.*—1° Si el minuendo aumenta ó el sustraendo disminuye, la resta aumenta en la misma cantidad.

2.° Si el minuendo disminuye i el sustraendo aumenta, la resta disminuye en la misma cantidad.

3.° Si al minuendo i sustraendo se les añade ó se les quita una misma cantidad, la resta no varía.

64. *Equidiferencia* ó proporcion por diferencia, es la igualdad de dos restas indicadas, por ejemplo:-

$$5-2=7-4.$$

Los términos del centro en una equidiferencia, se llaman *medios*, i los de los lados *extremos*. En la equidiferencia anterior 2 i 7 son los medios, 5 i 4 los extremos.

En toda equidiferencia, la suma de los extremos es igual á la suma de los medios. En efecto, agregando á los dos miembros de la igualdad anterior, la suma del primer medio i segundo extremo, resulta:

$5-2+2+4=7-4+2+4$. Pero, -2 i $+2$ se destruyen, lo mismo que -4 i $+4$, luego queda $5+4$, suma de extremos $=2+7$, suma de medios.

Un extremo se encuentra sumando los medios i restando de la suma el extremo conocido. Así, en la equidiferencia $6-7=9-x$. será $x=(7+9)-6=10$ (*).

Un medio se encuentra sumando los extremos i restando de la suma el medio conocido. Así, en la equidiferencia $6-4=x-7$, será $x=(6+7)-4=9$.

Problemas de restar.

65. 1.° El triunfo de la gloriosa revolucion emprendida en Guatemala por el Jeneral D. J. Rufino Barrios, se verificó el 30 de Junio de 1871. ¿Cuántos años habrán trascurrido hasta el 30 de Junio de 1885?

2.° Un empleado solicitó una licencia de 20 días, ¿qué

(*)—Las cantidades incógnitas en una cuestión artmética, se representan por las letras x, i z, i tambien suelen emplearse las demás letras del alfabeto castellano.

dia empezó á usarla, suponiendo que la terminó el 31 del mismo mes?

3.° Un cargamento de café, con todo i costales pesa 1478 quintales, i el café solo, pesa 1475. ¿Cuánto pesan los costales?

4.° Un hacendado gana cada año 32460 pesos i gasta 7594. ¿Cuántos pesos le quedan de utilidad?

5.° En un terreno que tiene 4507 caballerias, se hallan sembradas 2148. ¿Cuántas caballerias quedan sin cultivo?

6.° Una Nacion tiene en servicio 13.435 hombres militares, suponiendo que vayan á la guerra 3619, ¿cuántos hombres quedan?

MULTIPLICACION.

66. *Multiplicar* en jeneral, es hallar un número que sea respecto al multiplicando lo que el multiplicador es á la unidad.

Esta definición quiere decir: que si el multiplicador es igual á la unidad, el resultado será igual al multiplicando; si el multiplicador es menor ó mayor que la unidad, el resultado será menor ó mayor que el multiplicando, etc.

La cantidad que se relaciona con lo que se busca, se llama *multiplicando;* la que se relaciona con la unidad, *multiplicador*, i el resultado ó cantidad que se busca, *producto.*

Los números que se dan para multiplicar se llaman *factores.*

67. *Multiplicar enteros*, es sumar un número con sigo mismo, tantas veces como unidades tiene otro.

Segun esto, la multiplicacion de enteros, es un *modo abreviado* de sumar un mismo número varias veces con sigo mismo.

68. *Para indicar* una multiplicaciou, se pone el signo × ó . entre uno i otro factor. Así, por ejemplo, si queremos indicar la multiplicacion de 7 por 9, pondremos: 7×9 ó 7 . 9.

Cuando alguno de los factores se compone de varios términos, se encerrará entre paréntesis para indicar la multiplicacion, como se vé en los ejemplos siguientes: 7×(5+4+8); (4—1) . (3—2); (6+1—3) . (7+3); (6—1+4)×7,

69. *Casos de multiplicar.* Los casos que ocurren en la multiplicación, son tres: 1.° multiplicar un díjito por por otro díjito: 2.° multiplicar un compuesto por un díjito, i 3.° multiplicar un compuesto por otro compuesto,

Para multiplicar un díjito por otro, apréndase de memoria la siguiente

TABLA.

1 por 0, 0	2 por 0, 0	3 por 0, 0	4 por 0, 0
1 por 1, 1	2 por 1, 2	3 por 1, 3	4 por 1, 4
1 por 2, 2	2 por 2, 4	3 por 2, 6	4 por 2, 8
1 por 3, 3	2 por 3, 6	3 por 3, 9	4 por 3, 12
1 por 4, 4	2 por 4, 8	3 por 4, 12	4 por 4, 16
1 por 5, 5	2 por 5, 10	3 por 5, 15	4 por 5, 20
1 por 6, 6	2 por 6, 12	3 por 6, 18	4 por 6, 24
1 por 7, 7	2 por 7, 14	3 por 7, 21	4 por 7, 28
1 por 8, 8	2 por 8, 16	3 por 8, 24	4 por 8, 32
1 por 9, 9	2 por 9, 18	3 por 9, 27	4 por 9, 36
1 por 10, 10	2 por 10, 20	3 por 10, 30	4 por 10, 40
5 por 0, 0	6 por 0, 0	7 por 0, 0	8 por 0, 0
5 por 1, 5	6 por 1, 6	7 por 1, 7	8 por 1, 8
5 por 2, 10	6 por 2, 12	7 por 2, 14	8 por 2, 16
6 por 3, 15	6 por 3, 18	7 por 3, 21	8 por 3, 24
5 por 4, 20	6 por 4, 24	7 por 4, 28	8 por 4, 32
5 por 5, 25	6 por 5, 30	7 por 5, 35	3 por 5, 40
5 por 6, 30	6 por 6, 36	6 por 6, 42	8 por 6, 48
5 por 7, 35	6 por 7, 42	7 por 7, 49	8 por 7, 56
5 por 8, 40	6 por 8, 48	7 por 8, 56	8 por 8, 64
5 por 9, 45	6 por 9, 54	7 por 9, 63	8 por 9, 72
5 por 10, 50	6 por 10, 60	7 por 10, 70	8 por 10, 80
9 por 0, 0	10por 0, 0	11por 0, 0	12por 0, 0
9 por 1, 9	10por 1, 10	11por 1, 1	12por 1, 12
9 por 2, 18	10por 2, 20	11por 2, 22	12por 2, 24
9 por 3, 27	10por 3, 30	11por 3, 33	12por 3, 36
9 por 4, 36	10por 4, 40	11por 4, 44	12por 4, 48
9 por 5, 45	10por 5, 50	11por 5, 55	12por 5, 60
9 por 6, 54	10por 6, 60	11por 6, 66	12por 6, 72
9 por 7, 63	10por 7, 70	11por 7, 77	12por 7, 84
9 por 8, 72	10por 8, 80	11por 8, 88	12por 8, 96
9 por 9, 81	10por 9, 90	11por 9, 99	12por 9,108
9 por 10, 90	10por 10,100	11por 10,110	12por 10,120

70. *Para multiplicar* un compuesto por un díjito, multiplíquese el díjito sucesivamente por cada cifra del compuesto, comenzando por la derecha, teniendo cuidado de que, si en el producto de unidades, hai decenas, se agreguen al producto de las decenas; si en éste hai centenas, se agreguen al producto de las centenas &.

Supongamos, por ejemplo, qne se quiere multiplicar 54031 por 6.

Dispóngase la operacion como sigue, i diremos:

54031	Factores	6 por 1, 6; 6 por 3, 18: en 18 decenas hai una centena que se lleva i quedan 8 decenas; 6 por 0, 0 i una que se lleva, es 1; 6 por 4, 24: en 24 millares hai 2 decenas de millar, que se llevan i quedan 4 millares; 6 por 5, 30 i 2 que se llevan, son 32. Luego el producto será 324.186.
6		
324186	Producto	

71. *Para multiplicar* un compuesto por otro compuesto, considérese como multiplicando el número de mas cifras i escríbase encima del multiplicador ó número de menos cifras. Si los dos factores tienen igual número de cifras, escríbase desde luego uno sobre otro de modo que se correspondan las unidades de un mismo órden, i subráyense para separarlos del producto.

Multiplíquese en seguida la cifra de unidades del multiplicador por todo el multiplicando, luego la cifra de decenas del multiplicador por todo el multiplicando, i en jeneral, cada cifra del multiplicador por todo el multiplicando.

Colóquense estos productos, unos debajo dc otros; pero corriéndose un lugar hácia la izquierda; súmense despues. i la suma será el producto.

Supongamos que se quiere multiplicar 45341 por 2365.

Dispóngase la operacion como se vé en seguida i diremos:

45341	Multiplicando	
2365	Multiplicador	
226705	Productos parciales.	
272046		
136023		
90682		
$107_{1}231.465$	Producto.	

Puesto que los dos factores tienen diferente número de cifras, se considerará por multiplicando el que tiene más, ó sea 45341, i por multiplicador 2364. — Multiplicando en seguida las cifras de unidades, decenas, centenas, etc. del multiplicador por todo el multiplicando, lo cual se consigue en virtud de la regla del 2.° caso. hallaremos los productos 226705, 272046, &c. que colocados unos debajo de otros, i con un lugar corrido hácia la izquierda, dan por suma $107_{1}231.465$, que es el *producto* que se busca.

72. *Otra regla de multiplicar compuestos.* — Tambien puede encontrarse el producto de dos números compuestos, sin sacar productos parciales, lo cual, con alguna práctica, simplifica indudablemente la operacion.

Consiste este método, en hallar fácilmente i sumar con prontitud los productos que den el mismo órden de unidades, como por ejemplo, *unidades* por *millares*, *decenas* por *centenas*, *millares* por *unidades*, i *centenas* por *decenas*, que todos dan de *producto* un número exacto de *millares*.—Segun esto:

Para hallar el producto, multiplíquense las unidades por las unidades: escríbanse las unidades del producto i reténganse en la memoria las decenas.

Multiplíquense despues las unidades por las decenas i las decenas por las unidades, i á la suma de estos productos, agréguense las decenas retenidas: escríbanse las decenas de esta suma i reténganse en la memoria las centenas.

Multiplíquense las unidades por las centenas, las decenas por las decenas i las centenas por las unidades, i á la suma de estos productos, agréguense las centenas retenidas: escríbanse las centenas de esta suma, i reténganse en la memoria los millares, los que se agregarán despues á la suma de los productos de unidades por millares, decenas por centenas, centenas por decenas i millares por unidades, etc., etc.

Para comprender la práctica de este método, hallemos el producto de los números anteriores. Dispondrémos la operacion como se vé en seguida:

45 341 2 365 ——————— Producto.... 107,231.465	(1) Y decimos: 5 por 1, $\underset{\sim}{5}$. (2) 5 por 4, 20; 6 por 1, 6; 20 i 6, son 26. Quedan $\underset{\sim}{6}$ i llevamos 2.

(3) 5 por 3, 15 i 2 que llevamos, 17; 6 por 4, 24; 3 por 1, 3; 17, 24 i 3, son 44. Quedan $\underset{\sim}{4}$ i llevamos 4.

(4) 5 por 5, 25 i 4 que llevamos, 29; 6 por 3, 18; 3 por 4, 12; 2 por 1 2; 29, 18, 12 i 2, son 61. Queda $\underset{\sim}{1}$ i llevamos 6.

(5) 5 por 4, 20 i 6 que llevamos, 26; 6 por 5, 30; 3 por 3, 9; 2 por 4, 8; 26, 30, 9 i 8, son 73. Quedan $\underset{\sim}{3}$ i llevamos 7.

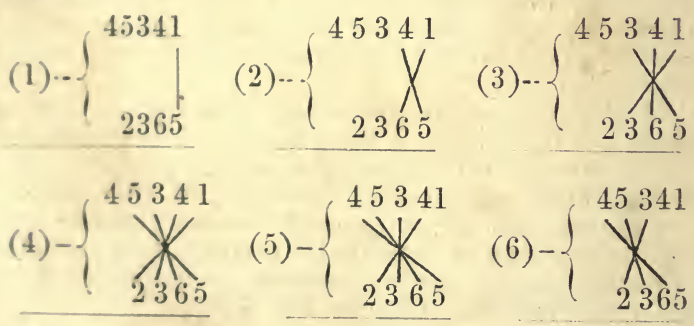
(6) 6 por 4, 24 i 7 que llevamos, 31; 3 por 5, 15; 2 por 3, 6; 31, 15 i 6, son 52. Quedan $\underset{\sim}{2}$ i llevamos 5.

(7) 3 por 4, 12 i 5 que llevamos, 17; 2 por 5, 10; 17 i 10, son 27. Quedan $\underset{\sim}{7}$ i llevamos 2.

(8) 2 por 4, 8 i 2 que llevamos, son $\underset{\cdot\cdot}{10}$.

Como ya no queda ninguna otra cifra qué multiplicar, será 10 la última porción del producto. Juntando, pues, las cifras subrayadas, resulta el número——— 107,231.465 igual al encontrado por el otro método.

Para mayor claridad, se indica á continuacion la direccion en que deben efectuarse las multiplicaciones parciales.



(7) — 45341
- 2365

(8) — 45341
2365

73. *Casos particulares* en que se abrevian las reglas de multiplicar enteros:

1.° *Para* multiplicar un entero por la unidad seguida de ceros, colóquense á la derecha de dicho entero los ceros que acompañan á la unidad.

Por ejemplo: 538×1000=538000.

2.° *Para* multiplicar un entero que no termine en ceros, por otro que se componga de una ó mas cifras significativas seguidas de ceros, hállese el producto de las cifras significativas en ámbos factores, i á la derecha del resultado, colóquense los ceros.

Por ejemplo: 358×35000 es = al producto 358×35 seguido de 3 ceros.

3.° *Para* multiplicar dos enteros que terminen en ceros, hállese el producto de las cifras significativas, i á su derecha escríbanse los ceros que hai en los factores.

Por ejemplo: 35000×400 es = al producto de 35×4 seguido de cinco ceros.

4.° *Para* multiplicar dos enteros cuando en medio de dos cifras significativas del multiplicador hai ceros, no se haga caso de los ceros, sino que se pasará á la cifra significativa que les sigue, cuidando de comenzar á escribir el producto debajo de la cifra por la cual se multiplica.

Se quiere multiplicar, por ejemplo, 65473 por 5001.

Dispóngase la operacion como se vé en seguida:

```
        65483
         5001
        -----
        65483
      327415
      ------
Producto.... 327,480.483
```

5.° *Para* multiplicar un entero por 11, 12, 13 hasta 19, multiplíquese por la cifra de unidades, escríbase este producto debajo del mismo número, corriendo un lugar hácia la derecha, i la suma de ámbas cantidades, será el producto total.

Si se quiere, por ejemplo, multiplicar 1428 por 18, multiplicaremos solo por 8, i el producto 11424, colocado debajo de 1428, corriendo un lugar hácia la dederecha, dará:

```
  1428
 11424
 -----
 25704   que es el producto.
```

6.° *Para* multiplicar un entero por otro compuesto de dos cifras, i cuya cifra de unidades sea 1, es decir: por 21, 31. 41 hasta 91, multiplíquese por la cifra de decenas, escríbase este producto debajo del mismo numero, corriendo un lugar hácia la izquierda, i la suma de ámbas cantidades, será el producto total,

Si se quiere, por ejemplo, multiplicar 3524 por 51, multiplicaremos solo por 5, i el producto 17620, colocado debajo de 2524, corriendo un lugar hácia la izquierda, dará:

```
   3524
  17620
 ------
 179724   que es el producto.
```

7.° *Para* multiplicar un entero por 25 ó 125, escríbanse á su derecha dos ó tres ceros respectivamente, i al resultado sáquese la 4.ª parte, si se trata de 25, i la 8.ª si se trata de 125.

(Advertencia.—Esta regla se comprenderá mejor cuando se sepa dividir.)

8.° *Para* multiplicar un entero por otro que se componga solo de nueves, escríbanse á su derecha, tantos ceros, como nueves haya; de lo que resulte réstese el mismo número, i la resta será el producto.

Se quiere multiplicar, por ejemplo, 1484 por 999. A la derecha del multiplicando pondremos tres ceros por los tres nueves del multiplicador, i resulta: 1484000; restando de este número el mismo multiplicando, tendremos: 1484000—1484=1482516, que es el producto.

8.° *Para* multiplicar un entero por 75, escríbanse dos ceros á su derecha, i la mitad del resultado sumada con la mitad de esta mitad, darán el producto.

La multiplicacion, por ejemplo, de 846 por 75, se practicará como sigue:-84600
mitad-42300
mitad de la mitad-21150

Producto.... 63450

9.° *Para* multiplicar un entero por 175, escríbanse dos ceros á su derecha, i este resultado sumado con su mitad i con la mitad de esta mitad, dará el producto.

Segun esto, sumando las tres primeras cantidades en el ejemplo anterior, tendremos el producto de 486 por 175.

10.° *Para* multiplicar un entero por otro que se diferencie de la unidad inmediata seguida de ceros en un número díjito, distinguiremos dos casos. 1.° que ese otro número sea menor que la unidad seguida de ceros: 2.° que sea mayor.

En el primer caso, escríbanse á la derecha del multiplicando los ceros que acompañen á la unidad; de lo que resulte, réstese el producto del número díjito diferencial, por el multiplicando, i la resta será el producto.

La multiplicacion, por ejemplo, de 1871 por 996, se practicará como sigue: 1871000
4×1871.... 7484 } La unidad seguida de ceros que mas se aproxima á 996, es 1000.
Resta ó producto 1863516

En el segundo caso, se efectúa la operacion de un modo análogo, con la diferencia de que *se suma* el resultado con el producto del díjito diferencial por el multiplicando.

La multiplicacion, por ejemplo, de 48715 por 1005, se practicará como sigue: 48 715 000 { La unidad seguida de ceros que mas se aproxima al multiplic.° es 1000
5×48715 243 575
Suma ó producto.... 48,958.575

11.° *Para* multiplicar un entero por varios números

compuestos sucesivamente, hállese de antemano el producto de dicho entero por los nueve números díjitos. formando así una tabla en la cual se encuentran los productos parciales que deben formar los productos totales.

Supongamos, por ejemplo, que se quiere multiplicar el número 74212, separada i sucesivamente por 314, 728 i 695.

Formaremos de antemano el producto de 74212 por los nueve números díjitos, advirtiendo que el producto por 1 es el mismo número; el producto por 2 es la suma del producto por 1 con sigo mismo; el producto por 3 es la suma del producto por 1 con el producto por 2; el producto por 4 es el doble del producto por 2; el producto por 5 es la suma del producto por 3 con el producto por 2, i así de los demás. Dicha tabla es la siguiente:

		Los productos serán por lo tanto:		
Prod.to por 1	74212	74212	74212	74212
,, ,, 2	148424	314	728	695
,, ,, 3	222636	296848	593696	371060
,, ,, 4	296848	74212	148424	667908
,, ,, 5	371060	222636	519484	445272
,, ,, 6	445272	33302568	54026336	51578340
,, ,, 7	519484	1.er prod.	2.° prod.	3.er prod.
,, ,, 8	593696			
,, ,, 9	667908			

12.° *Para multiplicar* por 875, escríbanse tres ceros á la derecha del otro factor: de lo que resulte sáquese la octava parte i la resta de ámbas cantidades será el producto.

Ejemplo.—Multiplicar 5734 por 875.—Dispóngase la operacion como sigue:

	5734000
Octava parte....	716750
Resta ó producto	5017250

Corolario.—La suma de este producto con 5734000, sería el de 5734 por 1875.

13.° *Cuando en el multiplicador* se observa que hai guarismos de una ó mas cifras múltiplos de otro ú otros, hállense los productos del multiplicando por es-

tos otros, i para sacar los demás productos parciales, multiplíquense los encontrados por el factor que falte á cada guarismo del multiplicador para ser igual á su guarismo múltiplo respectivo. La cifra de la derecha en cada producto parcial, debe colocarse debajo de la cifra de la derecha de su producto respectivo en el multiplicador.

Ejemplo.—Multiplicar 1354025 por 154856.

Operacion.

	1354025
	154856
Producto de multiplicando por 6...	8124150
Prod. por 48, ó del anterior por 8...	64993200
Prod. del multiplicando por 5...	6770125
Prod. por 15, ó del ant.r por 3...	20310375
Producto total....	209678895400

En este ejemplo comenzamos hallando el producto por 6, i para el de 48, multiplicamos el de 6 por 8, que es el factor que le falta para dar 48.

Despues hallamos el producto por 5, i para el de 15, multiplicamos el de 5 por 3, que es el factor que le falta para dar 15.

74. *Cuando se quiere* multiplicar un entero por el producto indicado de varios factores, multiplíquese dicho entero por el primer factor, el producto multiplíquese por el segundo factor, este nuevo producto por el tercer factor, i así sucesivamente.

Si por ejemplo quiere multiplicarse 51 por $7\times11\times3\times9$, multiplicaremos primero 51 por 7, el producto 357 por 11, el producto de estos dos números, que es 3927 por por 3, i el producto de estos dos números, que es 11781 por 9. Luego $51\times(7\times11\times3\times9)=11781\times9=106029$.

75. *Cuando se quiera* practicar una multiplicación de enteros cuyos factores son sumas ó restas indicadas, efectúense de antemano las sumas ó restas, i procédase despues, segun las reglas anteriores.

Así, por ejemplo, la multiplicación de $(7+4+1)$ por

(11—4), se reduce á multiplicar 12 por 7.

76. *Usos de la multiplicación.* La multiplicación se usa en 4 casos principalmente: 1.° Cuando se quiere hacer una cantidad cierto número de veces mayor.— 2.° Cuando sabido el precio ó relacion de una cosa, quiere saberse el precio ó relacion de varias de la misma especie.—3.° Cuando sabido lo que se compra con una moneda, quiese saberse lo que se compra en igual especie con varias monedas de la misma clase.— 4.° Cuando quieren reducirse unidades de especie superior á inferior.

Para resolver el primer uso, multiplíquese la cantidad propuesta por el número de veces que quiere hacerse mayor. Así por ejemplo, si se quiere hacer 25 veces mayor el número 34, basta multiplicar 34 por 25.

Cuando una cantidad se hace 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10 ó 100 veces mayor, los productos toman respectivamente los nombres de *duplo*, *triplo*, *cuádruplo*, *quíntuplo*, *sértuplo*, *séptuplo*, *óctuplo*, *décuplo* i *céntuplo*.

Para resolver el segundo uso, multiplíquese el precio ó relacion de una cosa por el número de ellas. Así por ejemplo, si una pieza de manta cuesta 5 pesos, 24 piezas costarán 24×5 pesos=$ 120.

Para resolver el tercer uso, multiplíquese el número de monedas por el número de cosas que se compran con una. Así por ejemplo, si con un peso se compran 8 varas de cinta, con 15 pesos se comprarán 15×8 varas=120 varas.

Finalmente, para resolver el cuarto uso, multiplíquese el número de unidades de especie superior, por el número de unidades de especie inferior que contiene una unidad superior de las de que se trata. Así por ejemplo, si se quieren reducir 28 manzanas de terreno á varas cuadradas, multiplicaremos 28 por 10000 varas cuadradas que tiene una manzana, i resulta que 28 manzanas contienen 280000 varas cuadradas.

77. *En la multiplicación* de números concretos, el producto es de la especie del multiplicando.

Segun esto, en la jeneralidad de los casos, pueden interpretarse las cuestiones de multiplicar, cuando solo esten escritos los factores, relacionando una unidad de órden superior del multiplicador, con todo el mul-

tiplicando, i preguntando despues la relacion que tenga todo el multiplicador con todo el multiplicando.

Supongamos, por ejemplo, que en un papel ó pizarra vemos escritos los siguientes factores: 8 dias × 30 leguas. Pues bien, para interpretar el problema, diremos: si una legua se camina en 8 dias, ¿30 leguas en cuántos dias se caminarán?

Otro ejemplo.—El producto 5 quintales × (2 dias, 6 horas, 10 minutos), se interpretará, diciendo: si en un dia se elaboran verbi-gracia 5 quintales, en 2 dias, 6 horas i 10 minutos, ¿cuántos quintales se elaborarán?

78. *Número de cifras de un producto.*—El producto de dos números enteros, se compone de tantas cifras cuantas tengan los dos factores juntos, ó de tantas cuantas tengan menos 1.

Así por ejemplo, el producto de 5478 por 169, constará, á lo mas, de 7 cifras, i á lo menos de 6.

Cuando sean más de dos los factores, el número de cifras del producto, es siempre *mayor* que la diferencia entre el número de factores i el número de todas sus cifras, *i no es mayor* que el número de cifras de los factores.

Así por ejemplo, el número de cifras del producto de 1584 por 371 por 6224, *será mayor* que 11, N.° de cifras de los factores—3, N.° de factores = 8, i *no será mayor* que 11, N.° de cifras de los factores.

79. *Proposiciones acerca de la multiplicación.* 1.ª El órden de colocación de los factores no altera el producto. De modo que lo mismo dá 7×4×9×5, que

5×4×9×7, que 9×5×4×7, etc.

2.ª Si uno de los factores de un producto se hace 2, 3, 4, etc. veces mayor ó menor, el producto queda hecho tambien 2, 3, 4, etc. veces mayor ó menor.

3.ª Si uno de los factores se hace cierto número de veces mayor ó menor i el otro factor se hace al contrario el mismo número de veces menor ó mayor, el producto no altera.

4.ª Si á uno de los factores se agrega cierta cantidad, el producto aumenta en el producto de la cantidad agregada por el otro factor. Así por ejemplo, si tenemos 7×4=28, i al 7 agregamos 5 verbi-gracia, el producto de (7+5) por 4 será = á 28+5×4.

5.ª Si de uno de los factores de un producto se resta cierta cantidad, el producto resulta disminuido en el producto de la cantidad que se resta por el otro factor. Así por ejemplo, si tenemos 8×7=56, i de 8 quitamos 3 verbi-gracia, el producto de (8—3) por 7 será = á 56—3×7.

6.ª Si todos los factores se multiplican ó dividen por cualquiera cantidad, el producto queda multiplicado ó dividido por el producto de dichas cantidades.

Así por ejemplo, si tenemos 12×6=72, i el factor 12 lo multiplicamos por 3 verbi-gracia, i el factor 6 lo multiplicamos por 5, el producto de 12.3 por 6.5 será = á 72×(3.5)

De igual manera, si el factor 12 lo dividimos por 2 i el factor 6 lo dividimos por 3, el producto de (12 : 2) por (6 : 3) será = á 72 : (2 × 3).

Corolarios. — 1.° Para multiplicar un producto, basta multiplicar uno de los factores.

2.° Para dividir un producto basta dividir uno de los factores (*)

Problemas de multiplicar.

80.—1.° ¿Cuántos disparos de cañon pueden hacerse en 8 horas, suponiendo que hai una batería con 10 cañones, i cada cañon hace 14 disparos en una hora?

2.° ¿Cuántos tipos de imprenta hai en un libro que consta de 253 pájinas, teniendo cada pájina 75 renglones i cada renglon 54 tipos.

3.° ¿Cuántos minutos hai en 5 dias, sabiendo que el dia tiene 24 horas i la hora 60 minutos?

4.° Un ejército se ha dispuesto en filas, de las que cada una contiene 125 hombres: habiendo resultado 351 filas, ¿cuántos hombres tiene el ejército?

5.° ¿Cuál es la suma de 381, 5253 veces con sigo mismo?

(*)—El producto le multiplicar un número por sí mismo una ó mas veces, se llama *potencia.*

La primera potencia de un número es el mismo número.

La segunda potencia ó cuadrado es el producto de multiplicar un número por sí mismo nna vez. Así 5×5 ó 25 es el cuadrado de 5.

6.° Una rueda puede dar 34 vueltas por minuto. ¿cuántas vueltas dará en 3 horas i 8 minutos?

7.° Averiguar el número de centavos que hai en 3560 piezas valor de 36 pesos cada una?

8.° Hai tres fuerzas: la primera es 524 veces mayor que la segunda, i la tercera es 65 veces menor que la segunda: ¿cuántas veces la primera fuerza es mayor que la tercera?

DIVISION.

81. *Dividir en jeneral*, es hallar un número llamado *cociente*, que sea respecto á otro llamado *dividendo*, lo que la unidad es á otro número llamado *divisor*.

Esta definicion quiere decir: que si la unidad es por ejemplo igual al divisor, el *cociente* será igual al *dividendo;* si es mayor que el divisor, el cociente será mayor que el dividendo; si es la mitad, tercera, etc. parte del divisor, el cociente será la mitad, tercera, etc. parte del dividendo, etc.

Tambien se dice, que dividir en jeneral, es la operacion en que, dado un producto i uno de los factores, se trata de buscar el otro factor.

Dividir enteros, es averiguar cuantas veces un número puede restarse de otro, ó cuantas veces un número está contenido en otro.

Segun esto, la division de enteros es un procedimiento abreviado para restar un número de otro todas las veces que se pueda.

82. *Para indicar una division*, se usa el signo ÷ ó : , que se coloca entre el dividendo i el divisor. Así por ejemplo, si se quiere indicar que el 30 va á dividirse por 5, se pondrá: 3÷5 ó 30 : 5.

Las divisiones pueden ser *exactas* ó *inexactas*. Division exacta es aquella en que no resulta *resíduo*, i division inexacta es aquella en que sí resulta *resíduo*.

Resíduo de una division, es la parte última que queda del dividendo i que ya no contiene al divisor.

Por ejemplo, en la division de 12 por 7 el resíduo es 5, porque 7 está contenido una sola vez en 12 i sobra 5 del dividendo que ya no contiene al 7 del divisor.

El resíduo en toda division se encuentra multipli-

cando la parte entera del cociente por el divisor i restando el producto del dividendo.—En toda division inexacta el dividendo es igual al resíduo sumado con el producto de la parte entera del cociente multiplicada por el divisor.

83. *Casos de la division.* —En la division ocurren tres casos:—1.° Dividir un díjito por otro díjito, ó un compuesto de dos cifras por un díjito, siendo la cifra de de decenas del compuesto menor que el díjito del divisor.

2.° Dividir un compuesto de tres ó mas cifras por un díjito, ó un compuesto de dos cifras por un díjito, siendo la cifra de decenas del compuesto igual ó mayor que el díjito del divisor.

3.° Dividir un compuesto por otro compuesto.

84. *Para hallar el cociente* en el primer caso, búsquese cual es el mayor número díjito que multiplicado por el divisor produzca el dividendo, ó un número próximamente ígual al dividendo.

Si hai resíduo, continúese la division agregándole un cero á su derecha, lo mismo que á cada resíduo que resulte en las divisiones siguientes. En tal caso, estos nuevos cocientes serán cifras decimales que completan la parte entera del cociente total.

Tambien puede completarse la parte entera de un cociente, poniendo un quebrado cuyo numerador sea el resíduo i su denominador el divisor; pero este procedimiento es menos cómodo que el anterior.

Supongamos que se quiere dividir 72 por 9. Como el mayor número que multiplicado por 9 produce 72 es 8, resulta que 8 es el cociente, de modo que puede ponerse $72 : 9 = 8$.

Supongamos ahora que quiere dividirse 35 por 6, para lo cual practicaremos la operacion como se vé en seguida:

$35 : 6 = 5'833\ldots$ ó bien, $35 : 6 = 5\frac{5}{6}$
50
20
20
2

Como el mayor número que multiplicado por el di-

visor dá un producto próximamente igual al dividendo, es 5, esta será la parte entera del cociente, i como el resíduo de la division es 5, pondremos un cero á su derecha i queda 50, que dividido por 6 dá 8 i sobra de resíduo 3; poniendo un cero á la derecha de este resíduo queda 20, que dividido por 6 dá 3 i sobra de resíduo 2. i así sucesivamente. Resulta pues, para cociente, 3 enteros i 833 milésimos, ó bien, 3 enteros i 5 sextos.

85. *Para mejor* intelijencia de este caso, es conveniente aprender de memoria la siguiente

TABLA.

1:1= 1	2:2= 1	3:3= 1	4:4= 1	5:5= 1
2:1= 2	4:2= 2	6:3= 2	8:4= 2	10:5= 2
3:1= 3	6:2= 3	9:3= 3	12:4= 3	15:5= 3
4:1= 4	8:2= 4	12:3= 4	16:4= 4	20:5= 4
5:1= 5	10:2= 5	15:3= 5	20:4= 5	25:5= 5
6:1= 6	12:2= 6	18:3= 6	24:4= 6	30:5= 6
7:1= 7	14:2= 7	21:3= 7	28:4= 7	35:5= 7
8:1= 8	16:2= 8	24:3= 8	32:4= 8	40:5= 8
9:1= 9	18:2= 9	27:3= 9	36:4= 9	45:5= 9
10:1=10	20:2=10	30:3=10	40:4=10	50:5=10
6:6= 1	7:7= 1	8:8= 1	9:9= 1	10:10= 1
12:6= 2	14:7= 2	16:8= 2	18:9= 2	20:10= 2
18:6= 3	21:7= 3	24:8= 3	27:9= 3	30:10= 3
24:6= 4	28:7= 4	32:8= 4	36:9= 4	40:10= 4
30:6= 5	35:7= 5	40:8= 5	45:9= 5	50:10= 5
36:6= 6	42:7= 6	48:8= 6	54:9= 6	60:10= 6
42:6= 7	49:7= 7	56:8= 7	63:9= 7	70.10= 7
48:6= 8	56:7= 8	64:8= 8	72:9= 8	80:10= 8
54:6= 9	63:7= 9	72:8= 9	81:9= 9	90:10= 9
60:6=10	70:7=10	80:8=10	90:9=10	100:10=10

86. *Para hallar el cociente* en el segundo caso, divídase cada cifra del dividendo por el díjito del divisor, comenzando por las unidades de órden superior, i añádase á cada dividendo parcial el resíduo del anterior.

La práctica de este caso se facilita sacando de cada

cifra del dividendo, la mitad, tercera, cuarta, etc. parte, segun que el divisor sea 2, 3, 4, etc. i llevando mentalmente los resíduos i dividendos parciales.

Ejemplo.—Supongamos que quiere dividirse 54871 por 5, para lo cual diremos: quinta parte de 5, 1, i no sobra nada.

Quinta parte de 4 no tiene, pondremos 0 i sobran 4 de resíduo.

Quinta parte de 48, 9 i sobran 3 de resíduo.

Quinta parte de 37, 7 i sobran 2 de resíduo.

Quinta parte de 21, 4 i sobra 1 de resíduo.

Convertido este 1 en décimos, nos quedan 10. Quinta parte de 10, 2 i no sobra nada.

Luego, 54871 : 5 = 10974'2.

87. *Para hallar el cociente* en el tercer caso, es decir, para dividir un compuesto por otro, es conveniente distinguir dos casos: 1.° que la parte entera del cociente conste de una cifra, i 2.° que conste de dos ó mas cifras.

La parte entera tendrá una sola cifra, siempre que el dividendo tenga el mismo número de cifras que el divisor; ó cuando, teniendo el dividendo una cifra mas que el divisor, el producto de 10 por el divisor, dá un número mayor que el dividendo.

Así por ejemplo, la parte entera del cociente al dividir 583 por 351, tiene una sola cifra, porque en el dividendo hai el mismo número de cifras que en el divisor.

La parte entera del cociente en la division de 3471 por 437, tiene tambien una sola cifra, porque si se multiplica el divisor por 10, resulta 4970 mayor que el dividendo.

La parte entera de un cociente, tendrá mas de una cifra, cuando al multiplicar 10 por el divisor, resulta un producto igual ó menor que el dividendo.

Para dividir compuestos cuando la parte entera del cociente conste de una cifra, divídase la primera cifra de la izquierda del dividendo por la primera de la izquierda del divisor (si hai igual número de cifras en los dos términos), ó las dos primeras cifras de la izquierda del dividendo, por la primera de la izquierda

del divisor, (si hai una cifra mas en el dividendo). Para saber si la cifra encontrada es la verdadera, multiplíquese por las cifras del divisor, comenzando por la izquierda, i los productos réstense mentalmente de las cifras del dividendo, comenzando tambien por la izquierda. Si se llega á encontrar un resto *igual* ó *mayor* á la cifra que se comprueba, dicha cifra es la *verdadera;* pero cuando algun producto parcial sea mayor que uno de los resíduos, la cifra del cociente debe *ser menor* que la que se comprueba, i en tal caso se le rebajará una unidad, continuando las multiplicaciones i restas, hasta que resulte, como hemos dicho, un resto *igual* ó *mayor* á la cifra de que se trata.

Comprobada la cifra del cociente, hállese el resíduo de la division, i complétese dicha cifra segun queda explicado en el número 84.

EJEMPLOS.

1-° Dividir 35488 por 8536, Dispóngase la operacion como se vé en seguida: 35483 : 8536 = 4'156.... ó $4\frac{156}{8536}$

13390
48540
58600

Como el dividendo tiene una cifra más que el divisor, dividimos 35 por 8 i el cociente 4 lo ensayamos, diciendo: 4 por 8, 32, para 35 faltan 3, que con el 4 del dividendo componen 34; 4, por 5 del divisor 20, para 34 faltan 14, i como este resto *es mayor* que 4, esta cifra es la verdadera.

Multiplicando 4 por el divisor, i restando el producto por el dividendo, queda de resíduo 1339, el que, agregando un cero á su derecha, se convierte en 13390, para segundo dividendo parcial.

Como este número tiene una cifra mas que el divisor, dividimos 13 por 8 i el cociente 1 que no necesita ensayarse, es evidentemente la segunda cifra del cociente total.

Multiplicando 1 por el divisor, i restando el producto del dividendo, queda de resíduo 4854, el que, con un cero á su derecha, se convierte en 48540 para tercer dividendo parcial.

Como este número tiene una cifra mas que el divisor, dividimos 48 por 8 i el cociente 6 lo ensayamos diciendo: 6 por 8, 48, para 48, 0; 6, por 5 del divisor, 30, para 5 del dividendo anterior, se pasa, luego *no es* 6 la cifra del cociente i pondremos 5, que se ensayará diciendo: 5, por 8 del divisor. 40, para 48 faltan 8, i como 8 es mayor que 5, esta cifra es la verdadera.

De un modo análogo se continuaría encontrando las otras cifras del cociente.

2.° Dividir 634 por 269. Dispóngase la operacion como se vé en seguida: 634 : 269 = 2'35....

960
1530
195

Teniendo el dividendo el mismo número de cifras del divisor, dividimos 6 por 2 i el cociente 3 lo ensayamos diciendo: 3, por 2 del divisor 6, para 6 del dividendo, 0; 3, por 6 del divisor, 18, para 3 del dividendo se pasa, luego 3 para cociente es grande, pongamos pues 2 i lo ensayamos diciendo: 2, por 2 del divisor 4, para 6 del dividendo faltan 2, i como este resíduo es igual á la cifra que se está ensayando, dicha cifaa es la verdadera.

Multiplicando ahora esta cifra por el divisor, i restando el producto del dividendo, se encuentra de resíduo 96, al que, agregando un cero á su derecha, se convierte en 960 para segundo dividendo parcial (').

(')—Los productos del divisor pór las cifras del cociente, se restan mentalmente de los dividendos parciales. Así, el producto de 2 por 269 que es el divisor, se resta del dividendo 634, diciendo: 2 por 9, 18 para 24, 6; 2 por 6, 12 i 2 de 24 son 14, para 23, 9; 2 por 2, 4 i 2 de 23 son 6. para 6 del dividendo, 0. El resto es, pues, 96.

Siempre, al practicar las restas de este modo, procúrese que el producto de cada cifra del dividendo por la cifra del cociente, se reste del número inmediato ó igual á dicho producto i que termine en la cifra del dividendo de la cual se resta. Por ejemplo, si la cifra del cociente es 5, el divisor 342 i el dividendo 1714, se hallará el residuo diciendo:

5 por 2, 10 para 14 (número inmediato á 10 i que termina en la 1.ª cifra del dividendo) 4; 5 por 4, 20 i 1 de 14, son 21, para 21 (número igual á dicho producto i que termina en la 2.ª cifra del dividendo) 0; 5 por 3, 15 i 2 de 21 son 17, para 17 (número igual á dicho producto i que termina en la 3.ª cifra del dividendo) 0. Luego el residuo de la division es 4.

Lo mismo se hace cuando el cociente tenga mas de una cifra.

Como este número tiene el mismo número de cifras que el divisor, dividimos 9 por 2 i el cociente 4 lo ensayamos diciendo: 4, por 2 del divisor, 8, para 9 falta 1, que con 6 de este segundo dividendo, compone 16; 4, por 6 del divisor, 24, para 16 se pasa; luego 4 es grande para cociente. Pongamos pues 3, i lo ensayamos diciendo: 3, por 2 del divisor, 6, para 9 faltan 3, i como este resto es igual á la cifra que ensayamos, dicha cifra está bnena.

Del mismo modo continuaríamos encontrando las otras cifras decimales del cociente.

88. *Para dividir compuestos*, cuando la parte entera del cociente tiene mas de una cifra, tómense de izquierda á derecha en el dividendo, tantas cifras cuantas basten para contener el divisor. Esta porcion de cifras del dividendo, divídase por el divisor, aplicando la regla que antecede, i así tendremos la primera cifra del cociente.

A la derecha del resíduo que deje esta primera division, colóquese la primera cifra qus sigue á la porcion tomada en el dividendo. Lo que resulte divídase por divisor, i así tendremos la segunda cifra del cociente. A la derecha del resíduo que deje esta segunda division, colóquese la segunda cifra que sigue á la porcion tomada en el dividendo. Lo que resulte divídase por el divisor, i así tendremos la tercera cifra del cociente.

De un modo análogo se continuará, hasta que se baje la última cifra de la derecha del dividendo.

Cuando algun resíduo, juntamente con la cifra que se baje del dividendo, dá un número menor que el divisor, se pondrá cero en el cociente, i á la derecha de dicho número se pondrá la cifra siguiente á la bajada, para tener así el nuevo dividendo parcial. Lo demás se continuará como queda explicado.

Ejemplo.—Supongamos que se quiere dividir

1674361 por 543.

Desde luego, dispondremos la operacion como se vé en seguida.

1674361 : 543 =3083'53....
04536
1921
2920
2050
454

La menor porcion del dividendo que puede contener al divisor, es 1674; dividiendo, pues, este número por el divisor, hallamos de cociente 5 i de resíduo 45. Al lado de este número colocamos 3, que es la cifra siguiente á la porcion tomada en el dividendo. i resulta 453 para segundo dividendo parcial. Como 453 es menor que 443 del divisor, al dividirse estos dos números darán cero de cociente, quedando de resíduo el mismo dividendo 453. Al lado de este resíduo colocamos 6, que es la segunda cifra siguiente á la porcion tomada en el dividendo i resulta 4536 para tercer dividendo parcial.

Dividiendo ahora 4536 por el divisor, resulta de cociente 8, sobrando de resíduo 192. Al lado de este número colocamos la tercera cifra siguiente á la porcion tomada en el dividendo, i resulta 1921 para tercer dividendo parcial. Dividiendo este número por el divisor hallamos de cociente 3, quedando de resíduo 292.

Ahora, como ya no hai mas cifras qué bajar del dividendo, tenemos que la parte entera del cociente, es 308; i continuando la division agregando un cero á la derecha de cada resíduo, hallamos 53 centésimos como complemento aproximado del cociente.

89. *Cocientes particulares.*—1.° Todo número dividido por cero, dá de cociente *el infinito*, porque no existe ninguna cantidad finita, por grande que se suponga, que multiplicada por cero nos dé el dividendo.

El *infinito* significa una cantidad mayor que cualquiera cantidad, por grande que sea, i se representa por medio del signo ∞, que se llama signo del *infinito*.

EJEMPLO: $5 : 0 = \infty$

2.° Cero dividido por cualquier número, dá de cociente cero, porque cero es la única expresión que mul-

tiplicada por cualquier número del divisor, dá de producto cero del dividendo.

EJEMPLO: $0 : 3 = 0$.

3.° Cero dividido por cero, dá de cociente una cantidad *indeterminada*, porque cualquier número multiplicado por *cero* del divisor, dá de producto *cero* del dividendo.

El signo de lo *indeterminado* es la letra Σ, que se lée *sigma*.

Segun esto $0 : 0 = \Sigma$

90. *Casos particulares* en que se abrevian las reglas para dividir enteros:

1.° *Para* dividir un entero por la unidad seguida de ceros, sepárense con una coma de derecha á izquierda en el dividendo, tantas cifras cuantos ceros acompañan á la unidad. Lo que queda á la izquierda de la coma, será la parte entera del cociente, i lo que queda á la derecha, serán las cifras decimales que lo completan.

Así por ejemplo, el cociente de dividir 14731 por 1000, será 14'731.

2.° *Para* dividir un entero por otro compuesto de dos cifras significativas seguidas de ceros, sepárense por un momento, de derecha á izquierda en el dividendo, tantas cifras cuantos ceros acompañan al divisor. Divídase en seguida la porcion que queda á la izquierda del dividendo por la porcion significativa del divisor, i lo que resulte será la parte entera del cociente. Colocando despues á la derecha del resíduo i de los demas qne resulten, una á una las otras cifras del dividendo, se tendrán así nuevos dividendos parciales, que divididos solamente por la porcion significativa del divisor, darán las cifras decimales que completan el cociente total.

Supongamos, por ejemplo, que se quiere dividir 85422 por 7000. Dispóngase la operacion como se vé en ssguida:

85'421 : 7000 = 12'202.

Separando en el dividendo tres cifras por los tres

ceros que acompañan al divisor, i dividiendo en seguida 85 por 7, hallamos de cociente 12, que será la parte entera del cociente total. A la derecha de 1 que es el resíduo, colocamos la otra cifra del dividendo, que es 4, i tendremos para nuevo dividendo I5, que dividido por 7 dá 2, quedando 0 de resíduo. Colocando á la derecha de este resíduo la cifra siguiente del dividendo que es 2, tendremos 2 para nuevo dividendo, que dividido por 7, dá cero en el cociente, quedando siempre 2 de resíduo. Colocando á la derecha de este resíduo la cifra 1 que es la última del dividendo, tendremos 21 para último dividendo parcial, i al dividirlo por 7, dá 3 de cociente sin sobrar resíduo.

Luego el cociente de la division propuesta es: 12 enteros i 203 milésimas.

3.° *Para* dividir enteros cuando el dividendo i divisor terminan en ceros, sepárense en ámbos términos, tantos ceros cuantos halla en el término que tenga menos, i en seguida divídanse los números que queden á la izquierda de los ceros separados.

Por ejemplo, para dividir 810(00 por 27(00, separamos los dos ceros en el dividendo i divisor, i el cociente de dividir 810 por 27 que es 30, será el cociente de los números dados.

4.° *Para* dividir un número por 5, 25, 125, 625, etc. multiplíquese dicho número por 2, 4, 8, 16, 32, etc. respectivamente, i los productos respectivos divídanse por 10, 100, 1000, 10000, etc.

Ejemplo.—Dividir 3589 por 625.

Para esto, multiplicaremos 3589 por 16, i dividiendo el producto por 10000, resulta para cociente 5'7424.

5.° *Para* efectuar abreviadamente la division de números compuestos, cuando es uno mismo el divisor i varios los dividendos, fórmense los productos del divisor por los nueve números díjitos, segun se dijo al tratar de la multiplicacion, i despues, observando entre cuales de esos productos se hallan contenidos los dividendos parciales, se determinarán desde luego las diferentes cifras del cociente.

Ejemplo.—Supongamos que se quieren dividir los números 175845, 67486 i 36975, por 351.

Operacion.

1	351
2	702
3	1.053
4	1404
5	1755
6	2106
7	2457
8	2808
9	3159

```
175845:351=500'982...
1755
----
  34
  345
  3450
  3159
  ----
  2910
   2808
   ----
    1020
     702
     ---
     318
```

```
67486:351=192'267..
351
---
3238
3159
----
  796
  702
  ---
  940
  702
  ---
  2380
  2106
  ----
  2740
  2457
  ----
   283
```

```
36975 : 351=105'341....
351
---
 187
 1875
 1755
 ----
  1200
  1053
  ----
   1470
   1404
   ----
     660
     351
     ---
     309
```

Como se vé, la operacion de dividir en este caso, se reduce á simples sustracciones.

91. *Usos de la division.*—Los usos principales de la division, son siete:

1.° *Cuando* se quiere averiguar las veces que un número contiene á otro.

Para esto, divídase el número mayor por el menor, i la parte entera del cociente expresará las veces que el primer número contiene al segundo.

2.° *Cuando* se quiere dividir un número en partes iguales, ó sacar á un número la mitad, tercera, cuarta, etc. parte.

Para resolver esta cuestión, divídase el número que se dé, por el de partes iguales en que quiera dividirse. El cociente será la mitad, tercera, cuarta, etc. parte, segun que se quiera dividir el número en 2, 3, 4, etc. partes iguales.

Así por ejemplo, si 360 quiere dividirse en 4 partes iguales, dividiremos 360 por 4, i el cociente 90 será la cuarta parte ó el número que repetido cuatro veces por sumando, dá 360.

En efecto, 90+90+90+90=360.

3.° *Cuando* se quiere repartir un número de cosas ó personas entre otro número de cosas ó personas.

Para esto, divídase el número de cosas ó personas que se quiere repartir, por el número de personas ó cosas entre las cuales se quiere repartir. El cociente dará lo que corresponde á cada persona ó cosa.

Así por ejemplo, si se pregunta cuántos soldados pueden alojarse en cada habitacion de un cuartel, habiendo 1650 soldados i teniendo el cuartel 15 habitaciones, dividiremos 1650 por 15, i el cociente 110 será el número de soldados que satisface la cuestion.

4.° *Cuando*, conocido el precio ó relación de varias unidades, quiere saberse el precio ó relación de una de la misma especie.

Para esto, divídase el precio ó relacion de todas las unidades por el número de ellas i el cociente será el precio ó relación de una.

Por ejemplo, si se quiere saber cuanto costó cada quintal de café, suponiendo que se vendieron 1500 quintales en 300 pesos, dividiremos 1500 por 300, i el

cociente $ 5 será el precio de un quintal.

Del mismo modo, si se quiere saber cuántas leguas se caminan en un dia, suponiendo que en 6 dias se caminan 126 leguas, dividiremos 126 por 6, i el cociente 21 será el número de leguas que resuelve el problema.

5.° *Cuando* conocido el precio ó relación de varias unidades i el precio ó relación de una, quiere saberse el número ó cantidad de dichas unidades.

Para esto, divídase el precio ó relación de todas las unidades por el precio ó relación de una, i el cociente será el número de ellas.

Por ejemplo, si se quiere saber cuántos metros de paño se pueden comprar con 350 pesos, á razon cada metro de 4 pesos, dividiremos 350 por 4, i el cociente 87'5 es el número de metros que se desea.

De igual manera, si se quiere saber en cuantos dias se haría una zanja de 360 varas de largo, en el supuesto de que cada dia se hicieron 5 varas, dividiremos 360 por 5, i el cociente 72 será el número de dias en que se hizo la zanja.

6.° *Cuando* se quieren reducir unidades de especie inferior á superior.

Para esto, divídase el número de unidades que se dé, por el número de unidades de la misma especie de éstas, que contiene la unidad superior de que se trata.

Así por ejemplo, si 450 piés se quieren reducir á varas, dividiremos 450 por 3 piés que tiene una vara, i el cociente 150 es el número de varas que se quiere.

7.° Cuando se trata de investigar los factores ó divisores primos de un número.

La regla para resolver este uso, se verá en otro lugar de la obra.

92. *Especie de que puede ser un cociente.* — El cociente en la division de números concretos, puede ser: unas veces de la especie del dividendo; otras, de la especie del dividendo i divisor; otras de una especie distinta de la del dividendo i divisor, i por último puede ser número abstracto.

Segun esto, para poder interpretar de algun modo una cuestión de dividir cuando solo esten escritos los términos de la division, *relaciónese todo el divisor con todo el dividendo, i luego pregúntese qué relación tie-*

ne una unidad de especie superior del divisor con todo el dividendo.

Por ejemplo, si en un papel ó pizarra viéramos escritos los siguientes números, 358 pesos: 25 pesos, podiamos interpretar la cuestión diciendo: si con 25 pesos se ganan verbi-gracia 358, ¿con un peso cuántos se ganarán?

Otro ejemplo. 11470 árboles : (5 caballerías—12 manzanas—150 varas cuadradas), se interpretará, diciendo: si en una extensión de 5 caballerías, 12 manzanas i 150 varas cuadradas se pueden sembrar á una misma distancia 11470 árboles, en una extension de una caballería, ¿cuántos árboles se podrán sembrar á la misma distancia?

93. *Número de cifras de un cociente.* — El número de cifras que puede tener un cociente, es igual á lo *menos* á la diferencia entre el número de cifras del dividendo i divisor, i á *lo mas* á dicha diferencia mas uno.

Así por ejemplo, la parte entera que tiene el cociente en la division de 16748 por 75, es á lo menos 3 i á lo mas 4.

Tambien se dice, que el número de cifras de un cociente es igual al número de cifras del dividendo que quedan á la derecha del primer dividendo parcial mas uno.

Así, en el ejemplo anterior el número de cifras que tiene la parte entera del cociente es 3, porque despues de 167 que es el primer dividendo parcial, quedan *dos cifras.*

94. *Proposiciones acerca de la division.* — 1.ª Si el dividendo aumenta ó disminuye por medio de suma ó resta, el cociente aumenta en el primer caso i disminuye en el segundo; pero no en la misma cantidad que se aumenta ó disminuye el dividendo.

2.ª Si el divisor aumenta ó disminuye por medio de suma ó resta, el cociente á la inversa, disminuye en el primer caso i aumenta en el segundo; pero no en la misma cantidad que se aumenta ó disminuye el divisor.

3.ª Si al dividendo i divisor se les agrega un mismo número, el cociente disminuye; pero no en ese número. Si se les quita un mismo número, el cociente aumenta. Aquí se supone que el dividendo es mayor que

el divisor.

4.ª Si siendo el dividendo igual al divisor se les agrega ó quita un mismo número, el cociente no altera.

5.ª Si el dividendo se multiplica ó divide por cualquiera cantidad, el cociente queda multiplicado en el primer caso i dividido en el segundo por la misma cantidad.

6.ª Si el divisor se multiplica ó divide por cualquiera cantidad, el cociente, á la inversa, queda dividido en el primer caso, i multiplicado en el segundo, por la misma cantidad.

7.ª Si el dividendo se multiplica por una cantidad, i el divisor se divide por la misma ú otra cantidad, el cociente queda multiplicado por el producto de las dos cantidades.

8.ª Si el dividendo se divide por una cantidad, i el divisor se multiplica por la misma ú otra cantidad, el cociente queda dividido por el producto de las dos cantidades.

9.ª Si el dividendo i divisor se multiplican ó dividen por una misma cantidad, el cociente no altera.

En resúmen: *todo cociente está en razon directa del dividendo, é inversa del divisor*, es decir: que la operacion que se haga con el dividendo, queda hecha con el cociente, i la que se haga con el divisor, queda hecha en sentido contrario con el cociente.

95. *Cuando se quiere* dividir un producto indicado, basta dividir uno de sus factores.

Así, por ejemplo, si el producto $12 \times 5 \times 30 \times 7$ quisiera dividirse por 6, bastaría dividir el 12 ó el 30 por 6. Dividiendo el factor 12, quedaría $2 \times 5 \times 30 \times 7$ como cociente ó sexta parte del producto propuesto.

Cuando alguno de los términos de la division expresa suma, resta, multiplicacion ó division indicada, efectúese de antemano esta operacion, para que solo quede la division de un número por otro.

Así, la operacion $360 : (2 \times 5 \times 3)$ se reduce á $360 : 30$

La operacion $(15-4) : (4+3+1)$ se reduce á $11 : 8$.

Se dice que un número es divisible por otro, cuando al dividirse por éste dá un cociente total entero, i se dice que es indivisible, en el caso contrario.

Así por ejemplo, 75 es divisible por 3, porque el co-

ciente 25 es entero; 14 es indivisible por 8, porque el cociente total no es entero.

El número que no es divisible mas que por sí mismo i por 1, hemos dicho que se llama número primo, *número primero* ó *factor simple*, como por ejemplo: 7, 11, 17, 5, etc.

El número que es divisible por otro, además de por sí mismo i por 1, se llama número *múltiplo*, *multíplice de otro*, ó *número compuesto por sus factores*, como por ejemplo 24, que además de ser divisible por sí mismo i por 1, lo es por 12, por 8, por 6, por 4, por 3 i por 2.

Se llama factor, divisor exacto, submúltiplo ó *parte alícuota de un número*, cualquier otro que está contenido en él un número entero de veces. Así los números 6, 4 i 5, son factores ó partes alícuotas de 240.

2 reales, 1 real i 4 reales, son partes alícuotas de un peso ú 8 reales.

6 meses, 2 meses, cuatro meses i 3 meses, son partes alícuotas de un año ó 12 meses.

Problemas de dividir.

96. 1.° Un padre al morir deja un capital de 12540 pesos para 4 hijos, i dispone: que al mas pequeño se le dé la mitad; al que le sigue la quinta parte; al otro la sexta parte, i al cuarto el resto que quede. ¿Cuánto corresponde á cada hijo?

2.° ¿Cuál es el número de dias que se empleó en hacer una obra valuada en 1560 pesos i ocasionando un gasto mensual de 30 pesos?

3.° El producto de tres números es 1845, i uno de ellos es 74: ¿qué número será el producto de los otros dos?

4.° ¿Cuántos dias hai en 7500 minutos?

5.° Hai un camino de 1200 leguas, ¿en cuántos meses se podrá recorrer, suponiendo que cada dia se caminan 8 leguas?

6.° En una ciudad que tiene 42,360 habitantes, se trata de levantar una suscricion de 60,000 pesos. ¿Con cuánto deberá contribuir cada habitante?

7.° Comprados 250 sombreros por valor de 1348 pesos, ¿á cómo sale cada sombrero?

8.° En cuántas horas se podrá dar la vuelta á la Tierra, sabiendo que tiene de lonjitud 40 millones de metros, i suponiendo que cada dia se caminan 25,000 metros?

Pruebas de las cuatro operaciones.

97. *Prueba de una operación*, es otra operación por medio de la cual se averigua si la primera está bien hecha.

Para que una prueba sea admisible, es preciso que no encierre una operación mas dificil que la que se trata de probar.

La prueba no dá *certeza* plena de que la operación de que se trata está bien hecha. De modo que, siempre que una prueba está bien practicada, i de acuerdo con la primera operación, solo tenemos con esto *una probabilidad* de que el rssultado de dicha operación es el verdadero, pues como se comprende, no es dificil equivocarnos en la prueba, i obtener en esta i en la operación primitiva errores que se compensen.

Por tales razones, lo que mejor debe hacerse para cerciorarnos si una operación está bien, es repetirla de nuevo. Explicaremos, no obstante, los procedimientos que jeneralmente exponen los autores como pruebas de las operaciones.

98. *Pruebas de la adicion.*—1.ª Repítase la suma de abajo para arriba, tal como se dijo al tratar de esta operación.

2.ª Súmense las cifras de la 1.ª columna de la izquierda, i réstese la suma, de las unidades que corresponden á la izquierda de la suma total. La resta redúzcase mentalmente á unidades del órden inmediato, y súmense con la cifra de este órden en la suma total; de esa suma, réstese mentalmente la de las cifras de la 2.ª columna de la izquierda; la resta redúzcase mentalmente á unidades del órden inmediato, i súmense con la cifra de este órden en la suma total; de esa suma réstese la suma de las cifras de la 3.ª columna de la iz-

quierda, i así se continúa hasta la última columna, i si la operacion está bien hecha será *cero* la resta final.

Ejemplo....	4583
	6201
	9432
Suma total	20216
	110
	...

Para probar, diremos: 4 i 6, 10, i 9 19, para 20 falta 1, que reducido á centenas se convierte en 10; 10 i 2, 12. Ahora, 5 i 2, 7, i 4, 11 centenas, para 12 falta 1, que reducida á decenas se convierte en 10; 10 i 1 son 11. Ahora, 8 i 3, 11, para 11, 0, que reducido á unidades dá 0; 0 i 6 es 6. Por último 3 i 1, 4, i 2 son 6, para 6 cero; luego la suma está bien hecha.

3.ª Sepárese uno de los sumandos, i la suma de los demás réstese de la suma total. Si la operacion está bien hecha, la resta debe ser igual al sumando separado.

Ejemplo ...	(5621)
	342
	9305
	72
Suma total....	15340
Suma de los otros 3 sumandos	9719
Resta....	5621 igual al sumando separado

4.ª *Prueba de los nueves.*—Para aplicar la prueba de los nueves en la suma, es preciso saber como se halla el resíduo de la division de un número por 9. Esto se consigue sumando las cifras del número, con excepcion de los nueves que tenga, i lo que quede, sacando los nueves á esta suma, será el resíduo.

Sea por ejemplo, el número 154938.

Para hallar el resíduo que quede, sacándole los nueves, diremos: 1 i 5 son 6, i 4 son 10, en 10 hai un nueve i sobra 1; 1 i 3 son 4, i 8 son 12; en 12 hai un nueve

i sobran 3, luego 3 es el resíduo.

Ahora, para efectuar la prueba, sáquense de cada sumando los nueves i á la derecha de cada uno escríbase el resíduo. Despues, súmense los resíduos de la derecha de los sumandos, i de su suma sáquense los nueves anotando el resíduo, el cual deberá ser igual al que resulte de la suma total, sacándole los nueves.

Apliquemos esta prueba al ejemplo siguiente, para lo cual se dispondrá la operacion como á continuacion se vé:

3506	saeándole los nueves,	queda de	residuo	5
9345	id.	id.	id.	3
2734	id.	id.	id.	7
Suma 15585,	saeándole los nueves, queda tambien 6 de residuo.		Suma 15, sacándole los nueves queda 6 de residuo.	

Como esta comprobacion puede verificarse aunque la suma esté mal hecha, siempre que *en ella se ponga un* **9** *en vez de* **0** *ó al contrario*, i *cuando á una cifra se agregue lo que á otra se quite*, se sigue que la prueba de los nueves *no es del todo buena*.

5.ª *Prueba de los onces.*—Para aplicar esta prueba, es preciso saber como se halla el resíduo de la division de un número por 11, ó en términos mas claros, lo que quede sacando los onces á un número. Esto se consigue sumando las cifras de lugar impar, i luego las de lugar par (¹), restando en seguida las dos sumas. Si la primera es igual ó mayor que la segunda, la diferencia es desde luego el resíduo; pero si la primera suma es menor que la segunda, la diferencia réstese de 11, i esta otra diferencia será el resíduo.

Ejemplos.—1.° Sacar los onces á 63751. Para esto decimos: la suma de las cifras de lugar impar es 14, i la de las de lugar par es 8; la diferencia entre estas sumas, que es **6**, es el resíduo.

2.° Sacar los onces á 5382. Para esto decimos: la suma de las cifras de lugar impar, es 5, i la de las de lugar par, es 13; como la primera suma es menor que la

(¹)—Son cifras de lugar *impar*, la 1.ª 3.ª 5.ª 7.ª 9.ª 11.ª etc. contadas de derecha á izquierda, i son de lugar par, la 2.ª 4.ª 6.ª 8.ª 10.ª 12.ª etc., contadas tambien de derecha á izquierda.

segunda, la diferencia entrambas, que es 8, se resta de 11, i la diferencia 3, será el resíduo.

Ahora, para efectuar la prueba, hágase lo mismo que en la prueba de los nueves, con la diferencia que los resíduos que queden en los sumandos i en la suma, sacando los onces, se encuentran como queda dicho.

Véase el ejemplo siguiente:

	4583	sacando los onces queda de resíduo			7
	14367	id.	id.	id.	1
	9510	id.	id.	id.	6
Suma	28460	sacando los onces queda tambien 3 de resíduo.			Suma 14, sacando los onces, queda 3 de resíduo.

99. *Pruebas de la sustraccion.* — 1.ª Súmese el sustraendo con la resta i la suma debe ser igual al minuendo.

2.ª Réstese del minuendo la resta i debe resultar el sustraendo.

3.ª Considerando el minuendo como una suma, i el sustraendo i resta como sus sumandos, puede aplicarse la prueba de los *nueves*, tal como se dijo en la adicion.

4.ª Haciendo la misma consideracion, puede aplicarse tambien la prueba de los *onces*

100. *Pruebas de la multiplicacion.*—1.ª Inviértase el órden de colocacion de los factores, i multiplicándolos de nuevo, se hallará un producto igual al primitivo.

2.ª Dividiendo el producto por uno de los factores, el cociente debe ser igual al otro factor.

3.ª *Prueba de los nueves.*—Sáquense los nueves á los factores i anótense á su derecha los resíduos. Al producto de estos resíduos, sáquense los nueves i el resíduo que quede debe ser igual al del producto total, sacándole tambien los nueves.

Ejemplo.—Supongamos el producto de 1835 por 752. La operacion i prueba se dispondrá como se vé en seguida:

	1835	sacando los nueves queda de resíduo			8	8x5=40 sacándo los nueves queda de resíduo 4.
	752	id.	id.	id.	5	
Producto	1379920,	sacánuole los nueves, queda tambien 4 de resíduo.				

4.ª *Prueba de los onces.* — La prueba de los onces, hágase como la de los nueves, con la diferencia que los resíduos se encuentran, segun se dijo al tratar de las pruebas de sumar.

Apliquemos esta prueba al ejemplo anterior:

	1835	sacando los onces queda	de residuo	9	9x4=36; sacando los onces quedan 3 de residuo.
	752	id. id.	id.	4	
Producto	1479920	sacando los onces que	de residuo	3	

La prueba de los onces, puede tambien verificarse, aunque la operacion esté *mal hecha*, siempre que en la suma ó producto á una ó á varias cifras de lugar impar, se les agregue ó quite la misma cantidad que á las cifras de lugar par, i de aquí que esta prueba sea defectuosa, como la de los nueves.

101. *Pruebas de la division.*—1.ª Multiplíquese la parte entera del cociente por el divisor, agregando al producto el resíduo, si le hai, i lo que resulte debe ser igual al dividendo.

2.ª Si la division es exacta, divídase el dividendo por el cociente, i éste nuevo cociente debe ser igual al divisor.

Si la division es inexacta, réstese del dividendo el resíduo; lo que quede, divídase por la parte entera del cociente, i el nuevo cociente debe ser como ántes, igual al divisor.

3.ª Considerando al dividendo como un producto cuyos factores son el divisor i el cociente, puede aplicarse la prueba de los nueves, lo mismo que para la multiplicacion, advirtiendo que cuando la division es inexacta, se resta el resíduo del dividendo, i lo que quede se considerará como el producto, siendo sus factores el divisor i la parte entera del cociente.

4.ª De un mode análogo puede aplicarse la prueba de los onces, que se explicó anteriormente en la multiplicación.

Advertencia.—La prueba de los nueves i de los onces, en la multiplicación i división, tienen los mismos defectos que se hicieron notar para la suma; pero entre una i otra, quizá sea mas fácil equivocarnos en la prueba de los nueves que en la de los onces.

CARACTERES DE LA DIVISIBILIDAD.

102. *Un número* es divisible por 2, cuando la cifra de su derecha es cero ó cifra par. Las cifras pares son 2, 4, 6 i 8.

103 *Un número* es divisible por 3, cuando la suma de sus cifras, consideradas en su valor absoluto es 3 ó un múltiplo de 3, como 201, 429, etc

104. *Un número* es divisible por 4, cuando las dos primeras cifras de su derecha, son ceros ó componen un número múltiplo de 4, por ejemplo los números 5700, 316, 9724, etc.

105. *Un número* es divisible por 5, cuando la cifra de su derecha es cero ó 5, como 480, 145, etc.

106. *Un número* es divisible por 6, cuando lo es por 2 i por 3, ó cuando la diferencia entre la cifra de unidades simples i el duplo de la suma de las demás cifras es cero, 6, ó un número múltiplo de 6. Por ejemplo, 5322 es divisible por 6, porque termina en cifra par i la suma de sus cifras compone 12, que es el múltiplo de 3; ó tambien porque $2\times(5+3+2)-2=20-2=18$ múltiplo de 6.

107. *Para conocer* si un número es divisible por 7, distinguiremos dos casos: 1.° que el número tenga tres cifras, i 2.° que tenga mas de tres.

Cuando tenga tres cifras, multiplíquense las unidades por 1, las decenas por 3 i las centenas por 2, i si la suma de estos productos es 7 ó un múltiplo de 7, todo el número será divisible por 7.

Ejemplo.—Sea el número 651, multiplicando la cifra de unidades por 1, la de las decenas por 3 i la de las centenas por 4, se encuentran los productos 1, 15 i 12, que sumados dan 28, i como este número es múltiplo de 7, 651 tambien lo será.

Cuando el número tenga mas de tres cifras, divídase en porciones de tres en tres cifras, de derecha á izquierda, i no importa que la última porcion de la derecha tenga las tres cifras cabales.

Súmense despues las porciones de lugar par i las de lugar impar, i réstense ámbas sumas; si la diferencia es 0, 7 ó un múltiplo de 7, todo el número será divisible por 7.

Ejemplo.—Sea el número 37174361098. Las porciones de lugar impar, son 098 i 174, i las de lugar par, 361 i 37. La suma de las primeras es 272 i la de las segundas es 398; restadas ámbas sumas, resulta 126, que en virrud de la regla del primer caso, es divisible por 7, puesto que (6x1+2x3+1x2)=14, múltiplo de 7. Luego todo el número propuesto es tambien divisible por 7.

Advertencia.—Cuando la diferencia entre la suma de las porciones de lugar par i la de las de lugar impar tenga tres cifras, aplíquese la regla del primer caso para ver si es divisible por 7; pero cuando tenga ma. de tres cifras, divídase en porciones de tres en tres cifras, i continúese como queda dicho, hasta que se encuentre una diferencia con tres ó menos cifras.

108. *Un número* será divisible por 8, cuando las tres últimas cifras de su derecha son ceros, ó forman un múltiplo de 8: por ejemplo 3000, 13816, etc.

109. *Un número* será divisible por 9, cuando la suma de sus cifras, consideradas en su valor absoluto es 9, ó un múltiplo de 9; por ejemplo 513, 62172, etc.

110. *Un número* será divisible por 10, cuando la primera cifra de su derecha es 0; es divisible por 100, cuando las dos primeras cifras de su derecha son ceros; es por 1000, cuando las tres primeras cifras de su derecha, son ceros, etc.

111. *Un numero* será divisible por 11, siempre que sumadas las cifras de lugar par i las de lugar impar, i restadas ámbas sumas, la diferencia es 0, 11, ó un múltiplo de 11.

Sea por ejemplo el número 358403210. La suma de sus cifras de lugar impar es 0+2+0+8+3=13, i la suma de sus cifras de lugar par, es 1+3+4+5=13, como la diferencia entre estas sumas es 0, se sigue que el número propuesto es divisible por 11.

112. *Un número* será divisible por 12, siempre que lo sea por 3 i por 4.

Así, el número 341100, que es divisible por 3, porque sumadas sus cifras dan un múltiplo de 3, i tambien es divisible por 4, porque termina en dos ceros, lo será por 12.

113. *Para conocer* si un número es divisible por 13,

distinguiremos dos casos: 1.° que el número no tenga mas de tres cifras, i 2.° que tenga mas de tres.

Cuando no tenga mas de tres cifras, multiplíquese la cifra de las decenas por 3 i la de las centenas por 4; hállese la diferencia entre la suma de estos productos i la cifra de unidades, i si la diferencia es 0, 13 ó un múltiplo de 13, todo el número propuesto será tambien divisible por 13.

Sea por ejemplo el número 481. Multiplicando las decenas por 3 i las centenas por 4, resultan los productos 24 i 16, que sumados componen 40. Hallando la diferencia entre 40 i 1, cifra de unidades, resulta 39, que es múltiplo de 13 evidentemente: luego el número propuesto es divisible por 13.

Cuando el número tenga mas de tres cifras, hágase como en la divisibilidad por 7, es decir: divídase en porciones de tres en tres cifras, de derecha á izquierda, i si la diferencia eutre la suma de las porciones de lugar par i la suma de las de lugar impar, es 0, 13 ó un múltiplo de 13, todo el número será divisible por 13.

Sea por ejemplo el número $\overline{186}\overline{148}\overline{846}$. La diferencia entre la suma de las porciones de lugar par i la suma de las de lugar impar, es:

$$(846+186)-148=1032-148=884,$$

i como esta diferencia, segun la regla del primer caso, es divisible por 13, todo el número propuesto tambien lo será.

Aquí puede hacerse la misma advertencia que en la divisibilidad por 7.

114. *Un número* será divisible por 14, siempre que lo sea por 2 i por 7.

Así, el número 4774, que es divisible por 2, porque termina en cifra par, i por 7, porque (774—4)=770, múltiplo de 7, será divisible por 14.

115. *Un número* será divisible por 15, siempre que lo sea por 3 i por 5.

Así,el número 45225, que es divisible por 5 porque termina en 5, i por 3 porque sumadas sus cifras dan un múltiplo de 3, será divisible por 15.

116. *Un número* será divisible por 16, siempre que

las cuatro difras de su derecha sean ceros, ó compongan un numero divisible por 16.

Así por ejemplo, los números 6750000 i 741616.

116. *En jeneral*, para conocer cuando un número es divisible por otro, se efectúa la division de dicho número por este otro; pero cuando el divisor de que se trata sea un número compuesto por sus factores, entónces el número dado será divisible, siempre que lo sea por los factores primos del compuesto.

Así, un número será divisible por 18, cuando lo sea por 2 i por 9; será divisible por 20, cuando lo sea por 4 i por 5; es divisible por 21, cuando lo sea por 3 i por 7, etc.

Tambien para conocer si un número es divisible por otro, puede formarse una tablita de la siguiente manera:

Escríbase 1: este 1 multiplíquese por 10, i el producto divídase por el divisor de que se trata, escribiendo el resíduo debajo del 1 anterior. Este resíduo multiplíquese por 10 i el producto divídase por el mismo divisor de que se trata, escribiendo el resíduo debajo del anterior. Continúese del mismo modo multiplicando los resíduos por 10, dividiendo los productos por el divisor de que se trate i escribiendo los resíduos unos debajo de otros, debiendo encontrar tantos cuantas cifras tenga el número.

Formada así la tabla, multiplíquense respectivamente las cifras del número comenzando por las unidades, por los resíduos contenidos en ella comenzando por 1, i si la suma de los productos dá el divisor de que se trata ó un múltiplo de él, el número propuesto será divisible por dicho divisor.

Ejemplo.—Averiguar si el número 39338 es divisible por 17.

Tabla auxiliar. $\left\{\begin{array}{l} 1 \\ 10 \\ 15 \\ 14 \\ 4 \end{array}\right.$

Multiplicando las cifras del número por los de esta

tabla, resultan los productos 8, 30, 45, 126 i 12, que sumados componen el número 221, el cual, en virtud de la misma tabla, dá los productos 1, 20 i 30, que sumados componen 51 que es evidentemente múltiplo de 17. Luego el número propuesto es divisible por 17.

NUMEROS PRIMOS.

117. *Para conocer* si un número es primo, divídase sucesivamente por cada uno de los primos 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, etc., hasta que se encuentre sin ser la division exacta un cociente menor que el divisor.

Así por ejemplo, si queremos saber qué clase de número, en cuanto á sus factores, es 223; lo dividiremos sucesivamente por 2, 3, 5, etc., hasta por 19, en cuyo caso encontramos el cociente entero 11, menor que 19, sobrando de resíduo 14. Luego 223 es número primo.

118. *Criba de Eratóstenes*, ó procedimiento para formar una tabla de números primos.—Escríbanse todos jos números impares, desde 1 hasta el límite que se quiera, con inclusion del 2. En seguida, táchese el cuadrado de 3, que es 9, i todos los números siguientes que ocupen el tercer lugar, á partir de 9 exclusive; despues táchese el cuadrado de 5, que es 25, i todos los números siguientes que ocupen el quinto lugar, á partir de 25 exclusive, i así sucesivamente se irán tachando los cuadrados de los primos 7, 11, 13, 17, etc. i todos los números siguientes que ocupen el 7.° 11.° 13.° 17.° etc. lugar, á partir de dichos cuadrados exclusive, hasta que se tachen los múltiplos de un número primo tal, que el cuadrado del primo siguiente sea mayor que el límite supuesto.

De modo que, para formar por ejemplo, la tabla de números primos comprendidos entre 1 i 500, deberán tacharse hasta los múltiplos de 19, porque el cuadrado del primo siguiente, que es 23, nos dá 529, mayor que 500, límite fijado.

119. *A continuacion* ponemos la série de números impares; i los números subrayados expresarán los que, segun la regla, deben tacharse para formar una tabla de los números primos comprendidos entre 1 i 349.

1, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25,
27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49,
51, 53, 55, 57, 59, 61, 63, 65, 67, 69, 71, 73, 75,
77, 79, 81, 83, 85, 87, 89, 91, 93, 95, 97, 99, 101,
103, 105, 107, 109, 111, 113, 115, 117, 119, 121,
123, 125, 127, 129, 131, 133, 135, 137, 139, 141,
143, 145, 147, 149, 151, 153, 155, 157, 159, 161,
163, 165, 167, 169, 171, 173, 175, 177, 179, 181,
183, 185, 187, 189, 191, 193, 195, 197, 199, 201,
203, 205, 207, 209, 211, 213, 215, 117, 219, 221,
223, 225, 227, 229, 231, 233, 235, 237, 239, 241,
243, 245, 247, 249, 251, 253, 255, 257, 259, 261,
263, 265, 267, 269, 271, 273, 275, 277, 279, 281,
283, 285, 287, 289, 291, 293, 295, 297, 299, 301,
303, 305, 307, 309, 311, 313, 315, 317, 319, 321,
323, 325, 327, 329, 331, 333, 335, 337, 339, 341,
343, 345, 347, 349.

120. *Hallar los divisores primos de un número.*— Para encontrar los divisores primos de un número, divídase este número i los cocientes que resulten por su menor divisor primo diferente de la unidad, hasta que el último cociente sea 1. Los diferentes divisores hallados serán los factores primos del número propuesto.

Supongamos, por ejemplo, que el número 360 quiere descomponerse en factores primos, para lo cual dispondremos la operacion como se vé en seguida.

Cocientes.	Divisores primos.
360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

Todo número es igual al producto de sus factores primos, es decir, que

$$360=2.2.2.3.3.5=2^3\ 3^2\ 5$$

121. *Hallar los divisores compuestos.*—Para encontrar los divisores compuestos, multiplíquese cada divisor primo por cada uno de los que tiene debajo en la operacion anterior, colocando los productos á la derecha del multiplicador i poniendo una sola vez los que salgan iguales. Así se tendrán los divisores compuestos de *á dos primos.*

Para los *de á tres*, multiplíquese cada uno de los *de á dos* por cada uno de los primos que tenga hácia la izquierda i en la parte inferior.

Para los *de á cuatro*, multiplíquese cada uno de los *de a tres* por cada uno de los primos que tenga hácia la izquierda i en la parte inferior, i así sucesivamente.

Encontremos, por ejemplo, los divisores compuestos de 360, para lo cual dispondremos la operacion como se vé en seguida:

360	2					
188	2	4 - -				
90	2	- - - -	- -8 - - - -			
45	3	6- - -	- 12 - - - -	- 24		
15	3	9- - -	- 18 - - - -	- 36 - - - -	-72	
5	5	10,15	20,30,45	- 40,60,90	120,180	360
1	Divisores primos...	Divisores de á dos primos.....	Divisores de á tres primos	Divisores de á cuatro primos..	Divisores de á cinco primos...	Divisores de á seis primos. ....

122. *Para saber* cuantos divisores diferentes tiene un número, multiplíquense los números que espresan las veces que están repetidos los divisores primos agregando á cada número 1.

Así, en el ejemplo anterior, siendo 3 el número de veces que está repetido el factor primo 2; 2 el número de veces que está el primo 3, i 1 el número de veces que

está el primo 5, tendrémos que

$(3+1)\times(2+1)\times(1+1)=4 . 3 . 2$ ó sea 24, es el número de divisores diferente que tiene 360.

Se llaman números primos entre sí, los que no tienen mas divisor comun que la unidad.

Por ejemplo, los números 12, 7, 25 i 13, son primos entre sí, aunque 12 i 25 no sean primos separadamente.

Algunas proposiciones acerca de la divisibilidad i de los números primos.

123. 1.ª *Si un* número es divisor de dos ó mas, será divisor de la suma de éstos.

Así por ejemplo, siendo 4 divisor de 12, 16 i 40, será tambien divisor de 12+16+40, ó sea 68.

2.ª *Si un* número es divisor de otros dos, será divisor de la diferencia de éstos.

Así por ejemplo, siendo 5 divisor de 75 i 20, será tambien divisor de 75—20, ó sea 55.

3.ª *Si un* número es divisor de otro, será divisor de cualquier múltiplo de este otro.

Así por ejemplo, siendo 3 divisor de 6, lo será tambien de 18, 24, 42 i 36 que son múltiplos de 6.

4.ª *Todo número* que sea divisor del dividendo i divisor de una division inexacta, es tambien divisor del resíduo, i recíprocamente: todo número que sea divisor del resíduo i divisor, es tambien divisor del dividendo.

Así, siendo 488 el dividendo, 64 el divisor i 40 el resíduo, todo número que sea divisor de 488 i 64, por ejemplo 4 será tambien divisor de 40, i vice-versa: siendo 4 divisor de 64 i de 40, lo será de 488.

5.ª *Si un* número primo es divisor de un producto compuesto de varios factores, tiene que ser divisor por lo menos de uno de los factores de dicho producto.

Así por ejemplo, siendo 5 divisor del producto 350 que es igual á $2\times25\times7$, será divisor de uno por lo menos de estos factores, como en efecto sucede.

6.ª *Si un* número es divisible por otros varios, primos entre sí dos á dos, es tambien divisible por el pro-

ducto de estos (').

Así por ejemplo, si un número es divisible por 5 por 3 i por 4, lo será por 60, que es el producto de éstos.

7.ª La série de números primos es ilimitada, ó lo que es lo mismo, hai infinitos números primos.

8.ª *Un número* no puede descomponerse mas que en un solo sistema de factores primos.

Es decir, que si tenemos por ejemplo el número 210, cuyos divisores primos son 2, 3, 5 i 7, cualquiera otra descomposicion que se haga no puede dar mas ni menos divisores que los expresados.

9.ª *Si un* número es primo con otro, será primo con cualquier múltiplo de este otro.

Así por ejemplo, siendo 5 primo con 3, será primo con 9, 12, 18, 21 etc. que son múltiplos de 3.

10.ª *Si un* número es primo con cada uno de los factores de un producto, será primo con el producto.

Así, siendo 4 primo con 5, 7 i 11, será primo con 5×7×11, ó sea 385.

11.ª *Si varios* números son primos entre sí, los productos que resulten de multiplicarlos por sí mismos, tambien serán números primos entre sí.

Así, siendo 5, 7 i 6 números primos entre sí, 5.5, 7.7, i 6.6, por ejemplo, son números primos entre sí.

12.ª *Si un* número es divisor de un producto compuesto de dos factores, i es primo con uno de ellos, debe ser divisor del otro factor.

Así por ejemplo, siendo 3 divisor de 450, ó de su igual 90×5 i primo con 5, será divisor de 90, que es el otro factor.

13.ª *Si el* dividendo i divisor de una division inexacta se multiplican ó dividen por un mismo número, el resíduo de la division queda multiplicado ó dividido por el mismo número.

Si suponemos, por ejemplo, que el dividendo es 128, el divisor 24 i el resíduo de la division 8, i multiplicamos ó dividimos el dividendo i divisor por 4, verbigracia, el resíduo de 128×4 : 24×4 ó de (128 : 4):(24:4) será respectivamente 8×4 ú 8 : 4.

(')—Se dice que varios números sou *primos entre sí*, *dos a dos*, cuando cada uno es primo con cada uno de los demae.—Por ejemplo 5, 16, 7, 9.

DEL MAXIMO COMUN DIVISOR.

124. *Máximo comun* divisor de dos ó mas números, es el mayor número que está contenido en ellos exactamente (').

Primer procedimiento para encontrarlo.—Descompónganse los números en sus factores primos, i luego fórmese un producto de los primos comunes, repitiéndolos tantas veces como estén menos. Si algun divisor primo se encuentra igual número de veces repetido en dos ó mas de los números, se pondrá solamente las veces que esté en uno de ellos.

Ejemplo—Hallar el M. C. D. de 60, 150 i 930.

Dispondremos el cálculo como se vé á continuacion:

60	2	150	2	930	2	M. C. d. de 60, 150 i 930—
30	2	75	3	465	3	2 . 3 . 5
15	3	25	5	155	5	
5	5	5	5	31	31	
1		1		1		

125. *Segundo procedimiento.*-Cuando son dos los números, divídase el mayor por el menor, i si resulta cociente exacto, el menor será el m. c. d.; pero si en esta division i las que siguen resulta resíduo, continúese dividiendo cada divisor por su resíduo, hasta que resulte un cociente exacto, en cuyo caso, el último divisor exacto es el máximo comun divisor de los dos números.

Ejemplo—Hallar el m. c. d. de 960 i 825.

Dispóngase la operacion como se vé en seguida, poniendo para mayor comodidad los cocientes encima de los divisores, i los últimos resíduos de cada division, desde luego como divisores, sin escribirlos debajo de los respectivos dividendos.

	1.er cociente	2.° cociente	3.er cociente		
	1	6	9	—	m. c. d. = 15.
960	825	135	15	0	
		1.er resíduo.	2.° resíduo.		

(')—La expresion máximo comun divisor, se escribe abreviadamente: m. c. d.

Advertencia.—Desde el momento que se encuentre un resíduo que sea primo con el divisor, deben suspenderse las divisiones, por indicar esto que los números dados son primos entre sí.

Cuando sean mas de dos los números, hállese el máximo comun divisor de dos de ellos, que para mayor comodidad se elijen los mas pequeños. En seguida, búsquese el máximo comun divisor de este máximo comun que resulta i otro de los números; luego el máximo comun divisor de este que resulta i otro de los números, i así sucesivamente. El último máximo comun divisor, será el de los números propuestos.

Ejemplo.—Hallar el m. c. d. de 120, 570, 450 i 36.

Desde luego vemos que el máximo comun divisor de 120 i 36, que son los números mas pequeños es 12.

El m. c. d. de 12 i 570 es 6.

I el m. c. d. de 6 i de 450, que es el último número es 6, luego m. c. d. de 120, 570, 450 i 36=6.

Advertencia.—Cuando se observe que dos de los números son primos entre sí, desde luego todos ellos serán primos entre sí, i en tal caso no hai necesidad de continuar adelante las operaciones.

Este segundo procedimiento es el mejor, desde luego, para investigar el m. c. d. de los números, pues ademas de poder indicarnos cuando deben suspenderse las operaciones por conocer que los números son primos entre sí, no está sujeto á conocer los caracteres de divisibilidad, los cuales, como se sabe, son mui limitados.

126. *Proposiciones* acerca del máximo comun divisor.—1.ª El máximo comun divisor. del dividendo y divisor de una division inexacta, es igual al del divisor i del resíduo.

Así, siendo el dividendo 184, el divisor 24 i el resíduo 16, se verifica que m. c. d. de 148 i 24=m. c. d. de 24 i 16.

2.ª *Si varios* números se dividen por su máximo comun divisor, los cocientes son números primos entre sí.

Supongamos, por ejemplo, que el m. c. d. de 60, 150 i 930 es 30. Pues bien, al dividir cada uno de los tres números por 30, resultan de cociente 2, 5 i 31, que como se vé, son primos entre sí.

3.ª *Si un* número es divisor de otros, es tambien divisor del máximo comun divisor de estos.

Así, siendo por ejemplo 5 divisor de 60, 150 i 930, lo es tambien de 30, m. c. d. de los tres números.

4.ª *Si varios* números se multiplican por un mismo número entero, su m. c. d. queda multiplicado por dicho número entero,

Así, por ejemplo, si los números 60, 150 i 930 cuyo m. c. d. es 30, los multiplicamos verbi-gracia por 7, el máximo comun divisor de los productos 60×7, 150×7 i 930×7 sería 30×7.

5.ª *Si uno* ó varios números se dividen por un factor primo que no sea comun á todos, el m. c. d. no altera.

Así es que, si tenemos los números 60, 150 i 930 i dividimos 930 por 31, factor primo i no comun á los otros números, el m. c. d. de 60, 150 i (930 : 31,) será tambien 30.

6.ª *El m. c. d.* de dos números, es el mismo que el uno de ellos i la diferencia entre los dos.

Problemas del m. c. d.

127. 1.° Si el m. c. d. de dos números es 30, ¿cuáles son estos números sabiendo que los cocientes que se obtienen al encontrar el m. c. d. son 5 i 2?

2.° Si se dividen los números 305 i 49 por el mayor número posible, se hallan los resíduos 5 i 4, ¿cuál es este número?

3.° Una persona desea colocar separadamente en el menor número de cajas de igual capacidad, 350 quintales de azúcar i 500 quintales de café, ¿cuántos quintales debe colocar en cada caja i cuántas cajas debe haber de cada artículo?

4.° Hai tres terrenos: el primero consta de 57000 metros cuadrados, el segundo de 93000, ¿entre cuántas personas podrán repartirse, suponiendo que á cada cual corresponda una parte que tenga de superficie el mayor número de metros cuadrados contenidos exactamente i al mismo tiempo en los tres terrenos?

5.° Cuatro individuos convienen en comprar cada uno una parte de 82 caballos al mismo precio cada caballo, i con la condicion de que cada individuo gastará en los caballos que le toquen todo su capital. El primero posee $360; el 2.° $320; el 3.° $500 i el 4.° $460. ¿cuanto costó da caballo i cuantos tocan á cada persona?

DEL MINIMO COMUN MULTIPLO,
ó menor dividendo comun.

128. *Se llama* mínimo comun múltiplo, ó menor dividendo comun, de varios números, el menor número divisible por ellos, ó que los contiene exactamente (').

Primer procedimiento para encontrarlo.—Descompónganse los números en sus factores primos, i el producto que resulte multiplicando los primos diferentes i los comunes, tantas veces como estén mas, será el m. c. m.

Cuando algun factor primo que se encuentra mas repetido, se halla igual número de veces en dos ó mas de los numeros, se pondrá en el producto solamente las veces que esté en uno de ellos.

Ejemplo.—Hallar el m. c. m. de 360, 45 i 400.

Dispóngase la operacion como se vé en seguida:

360	2	45	3	400	2
180	2	15	3	200	2
90	2	5	5	100	2
45	2	1		50	2
15	3			25	5
5	5			5	5
1				1	

m. c. m. de 360,45 i 400 = 2.2.2.2.5.5.3.3, ó sea 3.600

129. *Segundo procedimiento.*— Dispuestos los números en fila horizontal, divídanse todos ó los que se pueda por algun divisor comun á dos de ellos por lo menos, colocando debajo i en fila horizontal, los cocientes i los números indivisibles.

Divídanse del mismo modo los números de esta segunda fila, colocando debajo de ella los cocientes i los números indivisibles, i así sucesivamente, hasta que los números de la última fila sean primos entre sí.

El producto de estos números de la última fila por los divisores encontrados, será el mínimo comun múltiplo.

Apliquemos este método al ejemplo anterior, para lo cual dispondremos la operacion como se vé en seguida:

(')—La expresion mínimo comun múltiplo se escribe abreviadamente: m. c. m.

360—45—400	10	Divisores
36—45—40	9	
4— 5—40	5	
4— 1— 8	4	
1— 1— 2		

m. c. m.=2.10.9.5.4=3.600.

130. *Tercer procedimiento.* — Si son dos los números, divídase uno de ellos por el máximo comun divisor de ámbos; el cociente multiplíquese por el otro número i el producto será el mínimo comun múltiplo.

Ejemplo.—Hallar el mínimo comun múltiplo de 150 i 18.

Desde luego se observa que el m. c. d. de ambos números es 6. Dividiendo pues, uno de ellos por ejemplo 18 por 6, i multiplicando el cociente 3 por 150, el producto 450 será el m. c. m. de 150 i 18.

Cuando sean mas de dos los números. hállese el m. c. m. de dos de ellos; en seguida el m. c. m. del que resulta i otro de los números; luego el m. c. m. de este que resulta i otro de los números i así sucesivamente hasta tomar el último número. El m. c. m. final será el de los números propuestos.

Ejemplo.—Hallar el mínimo comun múltiplo de 150, 18, 96, i 420.

El m. c. m. de 150 i 18 es, segun queda dicho 450.

El m. c. m. de 450 i 96 es, por la misma regla 7200.

I el m. c. m. de 7200 i del último número 420 es 50400.

Luego m. c. m. de 150, 18, 96 i 420=50400.

Advertencia.—1.ª *Cuando* el mayor de los números es divisible por cada uno de los demás, dicho número será el m. c. m. de todos ellos.

Así por ejemplo, en los números 360, 90, 120 i 72 es 360 el m. c. m. de los cuatro números por ser divisible evidentemente por cada uno de los demás.

2.ª *Cuando* los números son primos entre sí dos á dos, su m. c. m. se encuentra multiplicando dichos números.

Así el m. c. m. de 7, 12, 5, i 11 será 7. 12. 5. 11=4620

131. *Proposiciones acerca del m. c. m.*—1.ª El producto de dos números es igual al de su m. c. m. por su m. c. d.

Así, el producto de 12 por 18 será igual al de 36 que es el m. c. m. por 6 que es el m. c. d. Es decir: $12 \times 18 = 36 \times 6$.

2.ª *Si varios* números se multiplican ó dividen por

un mismo número, su m. c. m. queda multiplicado ó dividido por ese número.

Así por ejemplo, si los números 12 i 18 cuyo m. c. m. es 36, se multiplan ó dividen verbi-gracia por 3, el m. c. m. de 12×3 i 18×3 ó 12: 3 i 18: 3 será respectivamente 36×3 ó 36: 3.

3.ª *Dividiendo* el m. c. m. de varios números por estos mismos números los cocientes son primos entre sí.

Así, si en el ejemplo anterior dividimos 36 por 12 i por 18, resultan de cociente 3 i 2 que son números primos entre sí.

Problemas de m. c. m.

132. 1.° Cuatro buques hacen el mismo viaje entre dos puntos de la costa: el 1.° lo hace cada 6 dias, el 2.° cada 8, el 3.° cada 10 i el 4.° cada 4. Suponiendo que estos buques salen hoi juntos para su destino ¿dentro de cuanto tiempo saldrán de nuevo el mismo dia?

2.° ¿Cuál será el menor volúmen de un cuerpo que contenga exactamente á otros tres de 350 metros cúbicos el 1.°, 248 el 2.° i 36 el 3.°?

3.° En la construccion de una casa se emplean tres clases de operarios: albañiles, carpinteros i herreros. A cada albañil se le paga 30 pesos mensuales, á cada carpintero 36 i á cada herrero 24. Suponiendo que á cada clase de operarios se pague la misma cantidad de salario, ¿cuál será el menor monto mensual que gane cada clase, i cual es el número de hombres de cada una?

4.° En una alameda se han plantado árboles de lado á lado: si se cuentan de 12 en 12, de 16 en 16, de 20 en 20 ó de 24 en 24, sobran 10 de residúo; pero si se cuentan de 22 en 22 no sobra nada ¿cuántos árboles tiene la alameda?

5.° Tres personas salen juntas de un punto de un circuito de 2400 leguas con el propósito de recorrerlo. La primera persona camina 20 leguas por dia; la segunda 15 i la tercera 24. ¿cuanto tiempo deberá trascurrir para que todas vuelvan á juntarse en el punto de partida, i cuantas vueltas dará cada una?

Problemas principales acerca de los sistemas diferentes de numeracion.

133. 1.° *Dado un número en* el sistema décuplo, es-

cribirlo en un sistema diferente.—Para conseguir esto, divídase el número dado i los cocientes que resulten por la base del sistema difente, hasta que se halle un cociente entero menor que la base. Los resíduos de la 1.ª, 2.ª, 3.ª, etc. divisiones i el último cociente, formarán las unidades de 1.°, 2.°, 3.°, etc. órdenes en el número que se quiere.

Ejemplo.—Escrito el número 354761 en el sistema décuplo, escribirlo en el sistema *docenario, duodecimal, ó de base doce.*

Dispondremos el cálculo como se ve en seguida:

```
354761|12
144   |29563|12
 067  | 55  |2463|12
   76   76  | 063|205|12
    41   43    3| 85|17|12
     5    7      01| 5|1
```

Luego 354761 (sistema décuplo)=151375 (sistema duodecimal.)

134. 2.° *Dado un número* en un sistema diferente del décuplo, escribirlo en este sistema.—Para resolver esta cuestion, divídase el número dado i los cocientes que resulten por la base del sistema décuplo, teniendo cuidado al efectuar las divisiones, de ir reduciendo cada cifra del número propuesto á unidades del órden inmediatamente inferior. Los residuos de la 1.ª, 2.ª, 3.ª, etc. divisiones i el último cociente menor que 10, formarán las unidades de 1.°, 2.°, 3.°, etc. órden en el número que se busca.

Sea por ejemplo el número anterior 151375 del sistema duodecimal que quiere escribirse en el sistema décuplo.

Dispondremos el cálculo como se ve en seguida:

```
151375|10
17    |18644|10
 85   |20   |2077|10
  63    06   |24  |256|10
   43    76    55 |29 |25|10
    41    76    57 114|35|3
     1     6     7   4 5|
```

Para efectar la primera division decimos: 1 por 12

es 12, i 5 17; 17 entre 10 á 1 i sobran 7; 7 por 12, 84, i 1, 85, entre 10 á 8 i sobran 5; 5 por 12, 60, i 3, 63, entre 10 á 6 i sobran 3; 3 por 12, 36; i 7, 43, entre 10 á 4 i sobran 3; 3 por 12, 36, i 5, 41, entre 10 4 i sobra 1.

Para la segunda division decimos: 1 por 12 es 12, i 8 20, entre 10 á 2 i queda 0; 0 por 12, 0, i 6 es 6, entre 10 á 0 i sobran 6; 6 por 12, 72, i 4 76, entre 10 á 7 i sobran 6; 6 por 12, 72, i 4, 76, entre 10 á 7 i sobran 6.

Para la tercera division decimos: 2 por 12, 24, i 0 24, entre 10 á 2 i sobran 4; 4 por 12, 48, i 7, 55, entre 10 á 5 i sobran 5; 5 por 12, 60, i 7, 67, entre 10 á 6 i sobran 7.

Como de un modo análogo se efectuarían las demás divisiones, resulta que: 151375 (sistema duodecimal)= 354761 (sistema décuplo.)

135. 3.° *Dado un número* en un sistema diferente del décuplo, escribirlo en otro sistema tambien diferente del décuplo.—Para resolver esta cuestion, divídase el número dado i los cocientes que resulten por la base del otro sistema diferente, hasta que resulte un cociente entero menor que dicha base, teniendo cuidado, segun se dijo en el problema anterior, de ir reduciendo cada cifra del número á unidades del orden inmediatamente inferior. Los resíduos de la 1.ª, 2.ª, 3.ª, etc. divisiones i el último cociente, formarán las unidades de 1.°, 2.°, 3.°, etc. orden en el número que se quiere.

Supongamos por ejemplo, que el número 34156 del sistema *septenario* ó de base 7, quiere escribirse en el sistema *oncenario* ó de base 11.

Dispóngase el cálculo como se ve á continuación:

```
34156|11
25   |2205|11
 22  |16  |131|11
  05 | 35 | 71|6
   41  17|  5|
    8   6|   |
```

Para efectuar la primera division decimos: 3 por 7 21, i 4, 25, entre 11 á 2 i sobran 3; 3 por 7, 21, i 1, 22, entre 11 á 2 i sobra 0; 0 por 7, 0 i 5 es 5, entre 11 á 0 i sobran 5; 5 por 7, 35, i 6 41, entre 11 á 3 i sobran 8.

Practicando de la misma manera las otras divisiones

resulta que: 34156 (sistema septenario)=6568 (sistema oncenario.)

136. *Observaciones, acerca* de los diferentes sistemas de numeracion.

1.ª Las cifras *diez* i *once* ó *a* i *b* se conviene en llamarlas respectivamente *dice* i *trice*.

Segun esto, el número 3. 5b6,52a.b85, se leerá diciendo: *tres mil quinientos tricenta i seis millones, quinientos veinte i dice mil, tricentos ochenta i cinco.*

2.ª Los sistemas de númeracion en los cuales se emplée una base menor que *diez*, tienen el inconveniente de dar mui larga la expresion de los números; i los sistemas en que la base sea mayor que *diez*, tienen el defecto de exijir una tabla de multiplicar demasiado extensa.

3.ª La conformacion de nuestra mano, hizo quizás que se adoptase el sistema décuplo; pero si desde un principio se hubiera pensado detenidamente acerca del sistema mas cómodo de numeracion, talvez se habria adoptado el docenario, duodecimal ó de base doce, por tener el número 12 los divisores 2, 3, 4, 6 que son bastante usuales en la práctica.

4.ª Los métodos que se emplean para efectuar las operaciones en el sistema *décuplo*, no difieren en la esencia de los que se emplean con números escritos en sistemas diferentes.

En todo caso, siempre que se opere con números de sistemas diferentes, es preciso recordar (siendo B la base) que B unidades de orden inferior componen una de orden superior, i que toda cifra escrita á la izquierda de otra, expresa unidades B veces mayores que la cifra que tiene á su derecha.

CALCULO DE LOS QUEBRADOS O FRACCIONES.

QUEBRADOS COMUNES.

Nociones Preliminares.

137. *Definicion.*—Quebrado ó fraccion es todo número que expresa una parte ó varias partes iguales de la unidad, como por ejemplo, un quinto de arroba, siete décimos de un peso.

138. *Orijen del quebrado.*—El quebrado se orijina de la division de la unidad en partes iguales, tomando de ellas cuantas se quiera, i tambien de la division de un número menor por otro mayor.

Así por ejemplo, si la unidad se divide en nueve partes iguales, i de ellas tomamos cinco, resultará un quebrado que se denominará *cinco novenos*.

De igual manera, si quieren distribuirse cinco manzanas entre ocho personas, tocaría á cada persona una fraccion de manzana que se denomina *cinco octavos*.

139. *Términos de un quebrado.*—Todo quebrado consta de dos términos que se llaman *numerador* i *denominador*. Numerador es el número que expresa las partes que se toman de la unidad, i denominador es el número que expresa las partes en que se divide la unidad.

Así por ejemplo, si la unidad se divide en 5 partes i de ellas se toman 3, resultará el quebrado *tres quintos*, cuyo númerador será 3 i su denominador 5.

140. *Escritura de los quebrados.*—Para escribar un quebrado, póngase el numerador encima del denominador separándolos por medio de una recta horizontal ú oblícua.

Así, el quebrado *tres quintos* se escribirá: $\frac{3}{5}$.

141. *Lectura de los quebrados.*—Para leer un quebrado, léase el numerador con los numerales cardinales *un*, *dos*, *tres*, etc. i el denominador con los numerales partitivos *medio* ó *medios*, *tercio* ó *tercios*, *cuarto* ó *cuartos*, etc. hasta *décimo* ó *décimos*. Cuando el denominador es 11 ó mayor que 11, léase con los numerales cardinales añadiendo la terminacion *avos*. Así se dice: 15 *avos* si el denominador es 15, 81 *avos* si el denominador es 81, etc.

142. *Division del quebrado.*—El quebrado puede ser: comun, decimal, propio, impropio, simple, compuesto i complejo.

Quebrado comun es el que tiene por denominador un número distinto de la unidad seguida de ceros.

Quebrado decimal es el que tiene por denominador precisamente la unidad seguida de ceros.

Quebrado propio es aquel cuyo numerador es menor que su denominador, como $\frac{3}{5}$, $\frac{8}{11}$ etc.

Los quebrador propios contienen siempre *menos* de una unidad entera.

Quebrado impropio es aquel cuyo numerados es igual ó mayor que el denominador, como $\frac{6}{6}$, $\frac{8}{6}$, $\frac{12}{5}$, etc.

Los quebrados impropios contienen siempre *una unidad* entera ó mas de una unidad.

Quebrado simple es el que se refiere á una sola unidad, como $\frac{3}{4}$ de *un quintal*; $\frac{2}{7}$ de *una legua*, etc.

Quebrado compuesto es el que se refiere á varias unidades ó á otro ú otros quebrados, como $\frac{3}{4}$ de *cinco quintales*; $\frac{3}{7}$ de $\frac{2}{4}$ de $\frac{5}{6}$, etc.

Quebrado complejo, es aquel que contiene otro quebrado en su numerador ó en su denominador, como $\frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{6}}$, $\frac{4\frac{1}{5}}{\frac{2}{7}}$, etc, cuyas expresiones se leen respectivamente $\frac{3}{2}$ partido por $\frac{5}{6}$ ó $\frac{3}{2}$ sobre $\frac{5}{6}$; $4\frac{1}{5}$ partido por $\frac{2}{7}$ ó $4\frac{1}{5}$ sobre $\frac{2}{7}$.

143. *Convertir un quebrado impropio en entero ó mixto.*—Para hallar el entero ó mixto á que es equivalente un quebrado impropio, divídase el numerador por el denominador.

Así por ejemplo, los quebrados $\frac{8}{8}$, $\frac{11}{3}$ i $\frac{12}{4}$, equivalen respectivamente á 1, $3\frac{2}{3}$, i 3, que son cocientes de dividar 8 por 8, 11 por 3 i 12 por 4.

144. *Convertir un mixto en quebrado.*—Para hallar el quebrado equivalente á un número mixto, multiplíquese el entero por el denominador del quebrado que lo acompaña al producto agréguese el numerador i á lo que resulte póngase por denominador el mismo del quebrado.

Así por ejemplo, el mixto $5\frac{3}{4}$ es equivalente á $\frac{5.4+3}{4}=\frac{23.}{4}$

145. *Convertir un entero en quebrado.*—Todo entero puede ponerse en forma de quebrado escribiéndole por denominador 1. Asi, el entero 9 es igual á $\frac{9}{1}$, que se leerá 9 partido por 1, 9 sobre 1 ó 9 *primos*.

Pero cuando quiera convertirse un entero en quebrado de un denominador dado, multiplíquese dicho

entero por el denominador dado i al producto póngase por denominador el mismo denominador dado.

Así por ejemplo, el entero 5, convertido en quebrado que tenga por denominador 11, es igual á $\frac{5.11}{11}=\frac{55}{11}$.

De esta regla se sigue: que la unidad es igual á $\frac{2}{2},\frac{3}{3},\frac{4}{4},\frac{5}{5}$ i en jeneral, á un quebrado cuyos dos términos son iguales.

146. *Convertir un quebrado en otro de un denominador dado.*—Regla jeneral.—Multiplíquese el numerador del quebrado por el denominador dado: el producto divídase por el denominador del quebrado i á lo que resulte póngase por denominador el mismo denominador dado.

Supongamos por ejemplo, que quiere convertirse el quebrado $\frac{3}{5}$ en otro quebrado equivalente cuyo denominador sea 15, para lo cual multiplicaremos 3 por 15, el producto 45 lo dividiremos por 5 i al cociente 9 le pondremos por denominador 15. De modo que $\frac{3}{5}$ es igual á $\frac{9}{15}$.

Cuando el denominador dado es múltiplo del denominador del quebrado propuesto, la operacion se hará abreviadamente, multiplicando los dos términos del quebrado por el factor que falte á su denominador para ser igual al denominador dado.

Así, si quiere convertirse el quebrado $\frac{3}{5}$ en quebrado de denominador 15, multiplicaremos los dos términos por 3 que es el factor que le falta á 5 para ser igual á 15, de modo que

$$\frac{3}{5}=\frac{3.3}{5.3}=\frac{9}{15}$$

Finalmente, cuando el denominador del quebrado propuesto es múltiplo del denominador dado, i el cociente de dividir el uno por el otro es factor del numerador del quebrado, la operacion se hará tambien abreviadamente, dividiendo los dos términos del quebrado propuesto por dicho cociente.

Así por ejemplo, si quiere convertirse el quebrado $\frac{12}{20}$ en otro de denominador 5, dividiremos sus dos términos por 4, que es el cociente de dividir 20 por 5, i el quebrado $\frac{3}{5}$ será el que se pide.

En cualquier otro caso no comprendido en los dos que preceden, es imposible convertir exactamente un quebrado en otro de un denominador dado.

Así, si quiere convertirse el quebrado $\frac{2}{5}$ en otro de denominador 8, aplicando la regla jeneral tendremos: $\frac{2}{5}=\frac{\frac{2}{5}\times 8}{8}=\frac{\frac{16}{5}}{8}=\frac{3\frac{1}{5}}{8}$. Despreciando en esta última expresion el quebrado $\frac{1}{5}$, queda el quebrado $\frac{3}{8}$ próximamente igual á $\frac{2}{5}$ i que se diferencia de él en menos de $\frac{1}{5}$.

147. *El cociente de toda* division de enteros es lo mismo que un quebrado cuyo numerador es el dividendo i cuyo denominador es el divisor.

Así por ejemplo 15 : 4 es igual á $\frac{15}{4}$.

De aquí se deduce:

1.° Que si se multiplica el numerador por un entero el quebrado queda multiplicado por dicho entero. $\frac{3.4}{5}=\frac{3}{5}\times 4$.

2.° Si se divide el numerador por uno de sus factores, el quebrado queda dividido por dicho factor. $\frac{6:3}{7}=\frac{6}{7}:3$.

3.° Si se multiplica el denominador por un entero el quebrado queda dividido por dicho entero. $\frac{3}{5.4}=\frac{3}{5}:4$.

4.° Si se divide el denominador por uno de sus factores el quebrado queda multiplicado por dicho factor. $\frac{3}{10:2}=\frac{3}{10}\times 2$.

5.° Si el numerador i denominador se multiplican ó dividen por un mismo número el quebrado no altera.

$$\text{Ejemplo.—}\ \frac{6}{27}=\frac{6:2}{27:2}=\frac{6:3}{27:3}=\frac{6.5}{27.5}$$

Reasumiendo diremos: que la magnitud de un quebrado, está en razon directa del numerador é inversa del denominador.

SIMPLIFICACION DE QUEBRADOS.

Quebrados irreducibles.

148. *Simplificar quebrados* es transformarlos en otros equivalentes cuyos términos sean mas pequeños.

149. *Procedimientos para simplificar quebrados.*— 1.° Divídase cada término del quebrado por el máximo comun divisor de ambos, i los cocientes puestos el primero por numerador i el segundo por denominador formarán el quebrado simplificado.

Ejemplo.—Supongamos que quiere simplificarse el quebrado $\frac{450}{945}$.

El m. c. d. del numerador i denominador es 45; dividiendo pues cada término por 45, resultan los cocientes 10 i 21 que forman el quebrado $\frac{10}{21}$ equivalente al quebrado propuesto.

150. 2.° *Procedimiento.*—Fórmese un quebrado cuyo numerador sea el producto indicado de los factores primos del numerador del quebrado propuesto, i cuyo denominador sea el producto indicado de los factores primos del denominador del mismo quebrado propuesto. Suprímanse los factores comunes que haya en ambos términos de ese quebrado que se forme, i lo que quede compondrá el quebrado simplificado que se busca.

Ejemplo.—Simplificar por este método el quebrado anterior $\frac{450}{945}$.

Descomponiendo cada término en sus factores primos resulta:

450=2. 3. 3. 5. 5, i 945=3. 3. 3. 5. 7.

Puestos ambos productos en forma de quebrado se tiene:

$$\frac{2.\ 3.\ 3.\ 5.\ 5.}{3.\ 3.\ 3.\ 5.\ 7.}$$

Suprimiendo aquí, igual número de factores comunes en ambos términos resulta $\frac{2.5}{3.7}$ ó $\frac{10}{21}$ para quebrado equivalente al propuesto.

151. 3.° Procedimiento.—Divídanse los dos términos del quebrado por algun factor comun que tengan segun los caracteres de la divisibilidad, i los cocientes pónganse en forma de quebrado. Los dos términos de este quebrado divídanse igualmente por algun divisor comun que tengan, poniendo siempre los cocientes en forma de quebrado i continúese del mismo modo hasta que resulte un quebrado cuyos dos términos sean primos entre si.

Ejemplo.—Supongamos que se quiere simplificar el mismo quebrado $\frac{450}{945}$.

Dividiendo los dos términos por el factor comun 3 resulta $\frac{150}{315}$.

Dividiendo los dos términos de este quebrado por el mismo factor 3 resulta $\frac{50}{105}$.

Dividiendo los términos de este quebrado por el factor comun 5 resulta $\frac{10}{21}$, i como 10 i 21 son numeros primos entre si, tendremos que $\frac{10}{21}$ es el quebrado equivalente al propuesto.

Advertencia.—El primer procedimiento, es el mas cómodo para simplificar quebrados, porque así se tiene la seguridad que el quebrado que resulta es irreducible, es decir el mas pequeño en sus términos equivalente al quebrado que se suponga.

152. *Quebrados irreducibles.*—Se llama quebrado irreducible el que no admite simplificacion exactamente. (1)

Todo quebrado cuyos dos términos son números primos entre si es irreducible, por ejemplo $\frac{13}{15}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{8}{11}$.

Si un quebrado es igual á otro quebrado irreducible, los dos términos del primero son iguales respectivamente á los dos términos del segundo multiplicados por un mismo número entero.

Así por ejemplo si el quebrado $\frac{a}{m}$ lo suponemos igua al irreducible $\frac{3}{5}$, se verificará que a es igual á 3 multiplicado por un entero, i m igual á 5 multiplicado por el mismo entero.

Si dos quebrados irreducibles son iguales, tienen iguales sus numeradores é iguales sus denominadores.

Es decir, que si el quebrado irreducible $\frac{a}{m}$ es igual al irreducible $\frac{c}{q}$, se verificará que a=c i m=q.

Si los dos términos de un quebrado irreducible se elevan respectivamente á cualquiera potencia ó se multiplican por si mismos cierto número de veces, las potencias que resulten formarán quebrados irreducibles.

---

(1) Decimos *exactamente*, porque los quebrados irreducibles pueden simplificarse con aproximacion, por medio de las fracciones continuas, segun veremos mas adelante.

Asi por ejemplo, si los dos términos del quebrado irreducible $\frac{3}{7}$ se multiplican por si mismos dos, tres, etc. veces, los quebrado $\frac{9}{49}$, $\frac{27}{343}$, etc. son quebrados irreducibles.

Si uno de los dos terminos de un quebrado irreducible se multiplica por un número primo con el otro término, el quebrado que resulte es tambien irreducible.

Así por ejemplo, si el numerador del irreducible $\frac{4}{9}$, se multiplica por 5, primo con el denominador 9, el quebrado $\frac{20}{9}$ que resulta es irreducible.

Ningun quebrado irreducible puede ser igual á un número entero.

Reduccion de quebrados á un comun denominador.

Definicion.—Reducir quebrados á un comun denominador es trasformarlos en otros equivalentes que tengan el mismo denominador.

154. *Regla jeneral.*—Para reducir quebrados á un comun denominador, multiplíquese los dos términos de cada uno por el producto de los demás denominadores, es decir menos por el suyo.

Ejemplo.—Reducir á un mismo denominador los quebrados $\frac{3}{5}$. $\frac{6}{8}$, $\frac{2}{3}$ i $\frac{1}{10}$.

Multiplicando los dos términos de $\frac{3}{5}$ por 8. 3. 10; los dos términos de $\frac{6}{8}$ por 5. 3. 10; los de $\frac{2}{3}$ por 5. 8. 10 i los de $\frac{1}{10}$ por 5. 8. 3, resultan los quebrados $\frac{3.8.3.10}{5.8.3.10}$, $\frac{6.5.3.10}{8.5.3.10}$, $\frac{2.5.8.10}{3.5.8.10}$, i $\frac{1.5.8.3}{10.5.8.3}$, ó bien

$$\frac{720}{1200}, \frac{900}{1200}, \frac{800}{1200} \text{ i } \frac{120}{1200}$$

que son los equivalentes á los propuestos i con el mismo denominador.

155. *Casos en que se abrevia la regla.*—La regla anterior se abrevia en dos casos. 1° cuando en los denominadores haya factores comunes, i 2.° cuando uno de los denominadores sea múltiplo de los demás.

En el 1.er *caso*, encuéntrese el mínimo comun múltiplo de los denominadores, i multiplíquense despues

los dos términos de cada quebrado, por el número que multiplicado por su denominador dá dicho mínimo comun múltiplo.

EJEMPLO.—Sean los quebrados $\frac{3}{6}$, $\frac{5}{4}$ i $\frac{7}{10}$.

El m. c. m. de los denominadores es 60. Multiplicando pues, los dos términos de $\frac{3}{6}$ por 10 que es el número que multiplicado por 6 da 60; los dos términos de $\frac{5}{4}$ por 15 que es el número que multiplicado por 4 da 60, i los de $\frac{7}{10}$ por 6 que es el número que multiplicado por 10 da 60 resultan los quebrados

$$\frac{30}{60}, \frac{75}{60} \text{ i } \frac{42}{60}$$

equivalentes á los propuestos i con igual denominador.

En el 2.° caso, multiplíquense los dos términos de cada quebrado por el número que multiplicado por su denominador produce el denominador múltiplo.

EJEMPLO.—Sean los quebrados $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{15}$ i $\frac{4}{30}$.

El denominador múltiplo de los demás es 30. Multiplicando pues los dos términos del primer quebrado por 5; los dos del segundo por 10; los del tercero por 2 i los del cuarto por 1, resultan los quebrados.

$$\frac{25}{30}, \frac{20}{30}, \frac{14}{30} \text{ i } \frac{8}{30}$$

que como se ve, son equivalentes á los propuestos i con el mismo denominador.

156. *Si varios quebrados* son irreducibles, el denominador comun de los quebrados equivalentes debe ser precisamente el mínimo comun múltiplo de los denominadores de los quebrados irreducibles.

Así por ejemplo, si los quebrados $\frac{5}{7}$, $\frac{4}{9}$ i $\frac{4}{11}$, se reducen á un comun denominador, éste debe ser precisamente $7 \times 9 \times 11$ que es el m. c. m. de los denominadores de las fracciones propuestas.

Averiguar cual es mayor de varios quebrados.

157. *Si los quebrados* tienen el mismo denominador es mayor el que tiene mayor numerador.

Así, de los quebrados $\frac{3}{11}$, $\frac{8}{11}$ i $\frac{4}{11}$ es mayor $\frac{8}{11}$ que tiene mayor numerador.

Si los quebrados tienen el mismo numerador, es mayor el que tiene menor denominador.

Así, de los quebrados $\frac{6}{9}$, $\frac{6}{5}$ i $\frac{6}{10}$ es mayor $\frac{6}{5}$ que tiene menor denominador.

Si los quebrados son todos propios ó todos impropios i tienen diferentes terminos, redúzcanse á un comun denominador i entónces será mayor el que equivalga á una de la fracciones resultantes que tenga mayor numerador.

Así por ejemplo, para saber cual es mayor de los quebrados $\frac{5}{7}$, $\frac{7}{9}$ i $\frac{11}{13}$, los reducimos á un comun denominador i se convierten en $\frac{585}{817}$, $\frac{637}{817}$ i $\frac{693}{817}$. Como en estos quebrados es mayor el tercero por tener mayor numerador resulta que su equivalente ó sea $\frac{11}{13}$ es el mayor de los quebrados propuestos.

ALTERACION QUE SUFRE UN QUEBRADO por agregar ó restar un mismo número á sus dos términos.

158. *Si se agrega* un mismo número á sus dos términos se verifica:

1.° Que si el numerador es igual al denominador el quebrado no altera.

EJEMPLO.—$\frac{5}{5}=\frac{5+4}{5+4}=1.$

2.° Si el numerador es menor que el denominador, el quebrado *aumenta*, es decir: el quebrado que resulta es mayor que el propuesto.

EJEMPLO.— $\frac{3}{7}<\frac{3+4}{7+4}$

3.° Si el numerador es mayor que el denominador, el quebrado *disminuye*, es decir: el quebrado que resulta es menor que el propuesto.

EJEMPLO.—$\frac{7}{3}>\frac{7+4}{3+4}$

Si se resta un mismo número de los dos términos se

Verifica: 1.° Que si el numerador es igual al denominador el quebrado no altera.

EJEMPLO.—$\frac{6}{6}=\frac{6-2}{6-2}=1$.

2.° Si el numerador es menor que el denominador, el quebrado *disminuye*.

EJEMPLO.—$\frac{6}{11}>\frac{6-2}{11-2}$

3.° Si el numerador es mayor que el denominador el quebrado *aumenta*.

EJEMPLO.—$\frac{11}{6}<\frac{11-2}{6-2}$.

ADICION DE QUEBRADOS.

159. REGLA JENERAL.—Para sumar quebrados con quebrados, si tienen el mismo denominador, súmense los numeradores i á la suma póngase por denominador el mismo de los quebrados.

Si los quebrados no tienen el mismo denominador, redúzcanse á un comun denominador, i procédase como anteriormente.

EJEMPLOS. 1.° $\frac{5}{9}+\frac{4}{9}+\frac{8}{9}=\frac{5+4+8}{9}=\frac{17}{9}$

2.° $\frac{3}{5}+\frac{4}{6}+\frac{2}{3}=\frac{18}{30}+\frac{12}{30}+\frac{20}{30}=\frac{18+12+20}{30}=\frac{50}{30}$

160. *Si se tiene* una série de fracciones iguales, la suma de los numeradores, partida por la suma de los denominadores forman una fraccion igual á cualquiera de las propuestas.

EJEMPLO.—Si en la serie $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{10}{13}=\frac{8}{12}$, se suman los numeradores i los denominadores, el quebrado $\frac{24}{36}$ es igual á cualquiera de los quebrados propuestos.

En efecto, $\frac{24}{36}=\frac{2\times12}{2\times12}=\frac{4\times6}{6\times6}=\frac{8\times3}{12\times3}$

Para sumar un entero con un quebrado redúzcase el mixto á quebrado.

161. *Sumar quebrados ó enteros con mistos i mistos con mistos.*—Para sumar quebrados con mistos, enteros con mistos, ó mistos con mistos, súmense primero los quebrados i despues los enteros, agregando á la suma de estos los enteros que resulten en la suma de los quebrados.

Ejemplo.—Supongamos que se quiere encontrar la suma de los siguientes números: $4\frac{3}{5}+\frac{2}{4}+6\frac{1}{5}$.

La suma de los quebrados es $\frac{26}{20}$ ó sea $1\frac{6}{20}$, que sumado con 10 que es la suma de los enteros da $11\frac{6}{20}$ como suma de los números propuestos.

Problemas de sumar quebrados.

162. 1.° Tres albañiles se comprometen á hacer una pared: el 1.° en 15 dias, el 2.° en 35 dias i el 3.° en 14 dias. ¿Qué parte de la pared harían todos juntos en un dia?

2.° Un estudiante compró un libro por valor de $13\frac{3}{5}$ pesos, i gastó en encuadernarlo 2 pesos. ¿Por cuanto deberá venderlo para ganar $3\frac{1}{6}$ pesos?

3.° El primer caño de una pila arroja 32 litros de agua en 4 minutos; el segundo arroja 10 en 5 minutos, i el tercero 15 en 9 minutos. ¿Cuantos litros arrojarían en una hora los tres juntos?

4.° Si dos correos saliendo al mismo tiempo de dos oficinas van al encuentro el uno del otro, recorriendo el primero la distancia en 10 dias i el segundo en 4. ¿En qué fraccion de la distancia se habrán aproximado en un dia?

5.° Un comerciante ha comprado tres esferas, pesando la primera $350\frac{2}{5}$ Kilógramos, la segunda 524 Kilógramos i la tercera $35\frac{4}{7}$ Kilógramos. ¿Cuánto pesarán las tres esferas?

6.° Cierto agricultor tiene sembradas de café $35\frac{1}{2}$ manzanas de terreno, de caña $\frac{5}{8}$ de manzana i de maiz 58 manzanas. ¿Qué cantidad de terreno tiene sembrada por todo?

SUSTRACCION DE QUEBRADOS.

163. *Restar un quebrado de otro.*—Si los quebrados tienen igual denominador, réstense los numeradores poniendo á la resta por denominador el mismo de los quebrados.

Si los quebrados no tienen un comun denominador, redúzcanse á él i se procederá como antes.

EJEMPLO 1.° $\frac{7}{11} - \frac{5}{11} = \frac{7-5}{11} = \frac{2}{11}$.

2.° $\frac{6}{5} - \frac{4}{7} = \frac{42}{35} - \frac{20}{35} = \frac{42-20}{35} = \frac{22}{35}$.

164. *Restar un quebrado de un entero.*—Multiplíquese el entero por el denominador del quebrado restando del producto el numerador, i póngase á la resta por denominador el mismo del quebrado.

EJEMPLO. $6 - \frac{2}{5} = \frac{6 \times 5 - 2}{5} = \frac{28}{5}$.

165. *Restar un entero de misto.*—Réstense los enteros i acompáñese á la resta de estos el quebrado del misto.

EJEMPLO. $8\frac{3}{7} - 5 = 3\frac{3}{7}$.

166. *Restar un misto de un entero.*—Tómese del entero del minuendo una unidad, i conviértase en quebrado con denominadar igual al del quebrado del sustraendo. De este quebrado que resulte réstese el del sustraendo, anteponiendo á la resta la de los enteros; pero considerando el entero del minuendo con una unidad menos.

EJEMPLO. $11 - 4\frac{3}{8} = 10\frac{8}{8} - 4\frac{3}{8} = 6\frac{5}{8}$.

Restar un entero de un quebrado. Conviértase el quebrado en misto i queda reducida la operacion á restar un entero de un misto.

EJEMPLO. $\frac{11}{3} - 2 = 3\frac{2}{3} - 2 = 1\frac{2}{3}$.

Restar un misto de un quebrado ó vice-versa i un misto de otro.—Conviértanse los mistos en quebrados i prócedase despues como en las reglas anteriores.

EJENPLOS: 1.° $\frac{15}{3} - 2\frac{1}{5} = \frac{15}{3} - \frac{11}{5} = \frac{75}{15} - \frac{33}{15} = \frac{42}{15}$

2.° $6\frac{3}{4} - \frac{2}{5} = \frac{27}{4} - \frac{2}{5} = \frac{135}{20} - \frac{8}{20} = \frac{127}{20}$

3.° $4\frac{2}{7} - 1\frac{4}{5} = \frac{30}{7} - \frac{9}{5} = \frac{150}{35} - \frac{63}{35} = \frac{87}{35}$

ADVERTENCIA.—Todas las reglas precedentes pueden reducirse á la de restar un quebrado de otro, pues si uno de los términos de la resta es misto se puede convertir en quebrado, i si es entero tambien puede escribirse en forma de quebrado poniéndole por denominador 1.

Así por ejemplo: $\frac{11}{3} - 3 = \frac{11}{3} - \frac{3}{1}$.

Problemas de restar quebrados.

169. 1.° Dos correos parten de un mismo punto; el primero recorre $5\frac{1}{2}$ leguas en una hora i el segundo $6\frac{3}{4}$ leguas ¿cuántas leguas recorre uno mas que el otro?

2.° Tres carpinteros hacen un armario en 5 dias: el primero prodría hacerlo por si solo en 12 dias i el segundo en 15, ¿qué parte del armario podría hacer diariamente el tercer carpintero?

3.° Se trata de la apertura de un camino carretero, i al efecto se ha trabajado en uno de sus extremos las tres quintas partes i en el otro extremo solo la décima parte ¿cuanto falta para terminar su construccion?

4.° ¿Cual es el número que sumado con $5\frac{2}{3}$ dá por resultado $68\frac{1}{2}$!

5.° Una pila se puede vaciar en 25 minutos i llenar en 15: al cabo de un minuto ¿qué parte de la pila se lle-

naría si las válvulas por donde entra i sale el agua se destapan al mismo tiempo?

6.° Dos locomotoras siguen la misma dirreccion: la primera camina 125 leguas en 6 horas horas i la segunda 340 en 4 horas, ¿cuántas leguas se alejan ó se acercan cada hora?

7.° Si de una pieza de paño que tiene 18 varas se cortan $7\frac{3}{5}$ varas ¿cuánto queda?

Multiplicacion de quebrados.

Multiplicar quebrados por quebrados.—Para multiplicar quebrados por quebrados, multiplíquense los numeradores entre sí i al producto póngase por denominador el producto de los denominadores.

EJEMPLO. $\frac{3}{5}\times\frac{2}{7}\times\frac{1}{10}=\frac{3.2.1}{5.7.10}=\frac{6}{350}.$

171. *Multiplicar un entero por un quebrado.*—Para multiplicar un entero por un quebrado, multiplíquese el entero por el numerador del quebrado i al producto póngase por denominador el mismo, del quebrado.

172. *Multiplicar mistos por enteros ó por quebrados i mistos por mistos.*—Para multiplicar mistos por enteros, mismos por quebrados i mistos por mistos, conviértanse los mistos en quebrados i quedará reducida la operacion á uno de los dos casos anteriores.

EJEMPLOS: 1.° $4\frac{2}{5}\times 6=\frac{22}{5}\times 6=\frac{132}{5}$

2.° $5\frac{4}{9}\times\frac{2}{5}=\frac{49}{9}\times\frac{2}{5}=\frac{98}{45}.$

3.° $6\frac{1}{3}\times 10\frac{2}{3}=\frac{19}{3}\times\frac{32}{3}=\frac{608}{9}.$

173. *Producto de un quebrado por su denominador.* El producto de un quebrado por su denominador es igual á su numerador.

EJEMPLO. $\frac{5}{8}\times 8=\frac{40}{8}=5.$

174. *Producto de un quebrado por sí mismo invertido.*—El producto de un quebrado por sí mismo invertido es igual á 1.

EJEMPLO. $\frac{6}{7}\times\frac{7}{6}=\frac{6.7}{7.6}=\frac{42}{42}=1.$

Problemas de multiplicar quebrados.

175. 1.° Un agricultor siembra cada dia $73\frac{3}{5}$ areas de terreno ¿cuantas areas sembrará en un año?

2.° Si se mezclan 6 botellas de agua con 15 de vino, ¿cuántas botellas habrá de agua i vino en $\frac{3}{11}$ de la mezcla?

3.° Habiéndose comprado $8\frac{2}{5}$ caballerias de terreno á $500 caballería i vendídose á $543\frac{3}{4}$ ¿cuánto se ha ganado en la venta?

4.° Se quiere hacer el quebrado $\frac{7}{43}$ setenta veces mayor ¿cuál es el resultado?

5.° ¿Cuánto costará un vidrio que tenga $5\frac{2}{3}$ metros cuadrados de superficie, suponiendo que cada metro cuadrado vale $2?

6.° Se preguntó á uno qué hora era i respondió: los $\frac{3}{5}$ de los $\frac{2}{3}$ de la novena parte de 24 horas ¿qué hora era?

7.° Se ha vendido una cantidad de quintales de café: los $\frac{2}{7}$ á $14 el quintal; los $\frac{3}{5}$ á $9; i 45 quintales á $11\frac{2}{3}$ ¿cuánto se recibió por todo?

Division de quebrados.

176. *Dividir un quebrado por otro.*—Para dividir un quebrado por otro, multiplíquese el quebrado dividendo por el quebrado divisor invertidos sus términos.

EJEMPLO. $\frac{3}{5}:\frac{4}{7}=\frac{3}{5}\times\frac{7}{4}=\frac{21}{20}.$

177. *Abreviaciones de la regla anterior.*—1.ª Para

dividir quebrados con igual denominador, divídase el numerador del dividendo por el numerador del divisor.

EJEMPLO. $\frac{8}{9} : \frac{3}{9} = \frac{8}{3}$.

2.ª Para dividir quebrados con igual numerador, divídase el denominador del divisor por el denominador del dividendo.

EJEMPLO. $\frac{5}{8} : \frac{5}{4} = \frac{4}{8}$.

3.ª Cuando los dos términos del dividendo son respectivamente múltiplos de los dos términos del divisor, divídase numerador por numerador i denominador por denominador, poniendo ambos cocientes en forma de quebrado.

EJEMPLO. $\frac{15}{24} : \frac{5}{6} = \frac{15:5}{24:6} = \frac{3}{4}$.

4.ª Cuando los dos términos del dividendo son respectivamente factores de los dos términos del divisor divídase el denominador del divisor por el denominador del dividendo, i luego el numerador del divisor por el numerador del dividendo, poniendo ambos cocientes en forma de quebrado:

EJEMPLO. $\frac{3}{5} : \frac{12}{25} = \frac{25:5}{12:3} = \frac{5}{4}$.

178. *Dividir un quebrado por* un entero, i un entero por un quebrado.—Para dividir un quebrado por un entero i vice-versa, considérese al entero por denominador 1, i procédase como para divivir un quebrado por otro.

EJEMPLOS: 1.° $\frac{5}{9} : 4 = \frac{5}{9} : \frac{4}{1} = \frac{5}{9} \times \frac{1}{4} = \frac{5}{36}$.

2.° $6 : \frac{4}{10} = \frac{6}{1} : \frac{4}{10} = \frac{6}{1} \times \frac{10}{4} = \frac{60}{4}$.

La unidad dividida por un quebrado da de cociente el mismo quebrado invertido.

Así, $1 : \frac{3}{5} = \frac{1}{1} : \frac{3}{5} = \frac{1}{1} \times \frac{5}{3} = \frac{5}{3}$.

179, *Dividir un misto por un entero i vice-versa* un misto por un quebrado i vice-versa, i un misto por otro.—Cuando uno ó los dos términos de la division son números mistos, conviértanse en quebrado, i quedará reducida la operacion á uno de los casos anteriores.

EJEMPLOS. 1.° $4\frac{2}{5} : 6 = \frac{22}{5} : 6 = \frac{22}{5} : \frac{6}{1} = \frac{22}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{22}{30}$.

2.° $8 : 3\frac{1}{5} = 8 : \frac{16}{5} = \frac{8}{1} : \frac{16}{5} = \frac{8}{1} \times \frac{5}{16} = \frac{40}{16}$

3.° $4\frac{2}{5} : \frac{1}{3} = \frac{22}{5} : \frac{1}{3} = \frac{22}{5} \times \frac{3}{1} = \frac{66}{5}$

4.° $\frac{3}{4} : 5\frac{1}{6} = \frac{3}{4} : \frac{31}{6} = \frac{3}{4} \times \frac{6}{31} = \frac{18}{124}$

5.° $2\frac{1}{3} : 4\frac{2}{5} = \frac{7}{3} : \frac{22}{5} = \frac{7}{3} \times \frac{5}{22} = \frac{35}{66}$

Problemas de dividir quebrados.

180. 1.° Un militar que gana diariamente $\$3\frac{2}{5}$ pide adelantados $69, ¿cuantos dias de sueldo se le habrán anticipado?

2.° ¿En cuantos dias se podrá tapizar una pared de $134\frac{2}{8}$ varas cuadradas, suponiendo que cada dia se tapicen $10\frac{1}{5}$ varas?

3.° Con $658 se han comprado $73\frac{2}{5}$ hectáreas de un terreno, ¿á como sale cada hectárea?

4.° ¿Cuanto producirá un centavo de interes anual, si $8 producen $\$364\frac{2}{5}$?

5.° Hallar un número que sea respecto de $\frac{5}{8}$ lo que 1 respecto de $\frac{3}{4}$.

6.° La rueda de una máquina da $52\frac{1}{2}$ vueltas en 5 minutos, ¿cuantas vueltas dará en 10 segundos?

7.° Una pila que tiene llenos los $\frac{3}{7}$ de su capacidad contiene 450 barriles de agua ¿cuál es su capacidad?

8.° Dos correos parten de los estremos de un camino el primero recorre 36 kilómetros por hora i el segundo $25\frac{3}{4}$ kilómetros por hora: siendo la lonjitud del camino de $252\frac{1}{2}$ kilómetros ¿al cabo de cuanto tiempo se encontrarán los dos correos?

Valuacion de quebrados.

181. Definicion.—Valuar un quebrado es hallar su equivalencia en unidades de la misma denominacion á que se refiere ó de sus denominaciones inferiores.

182. *Valuar un quebrado propio que se refiera á una unidad.*—Multiplíquese el numerador por las unidades de especie inferior que contiene la unidad á que se refiere el quebrado, i el producto divídase por el denominador. El quebrado que complete el cociente en caso que haya resíduo se valúa del mismo modo.

Ejemplo.—Valuar los $\frac{3}{5}$ de un año.

Como el año tiene 12 meses, multiplicamos 3 por 12 i el producto 36 dividido por 5 da $7\frac{1}{5}$ meses.

Como el mes tiene 30 dias, multiplicamos el numerador de $\frac{1}{5}$ por 30, i el producto dividido por 5 da 6.

Luego $\frac{3}{5}$ de un año=7 meses i 6 dias.

La operacion se dispondrá en la práctica así:

3 : 5=7 meses, 6 dias
×12 meses
36
1
× 30 dias
30
0.

Si el quebrado es impropio i se refiere á una unidad divídase el numerador por el denominador: el cociente si es entero, será el valor del quebrado en unidades de su misma denominacion; i si es misto, se valuará el quebrado que acompaña al entero por la regla anterior.

Ejemplos. 1.° Valuar los $\frac{15}{3}$ de un quintal.

Dividiendo el numerador por el denominador resulta de cociente 5, que son los quintales que contiene el quebrado.

2.° Valuar los $\frac{14}{3}$ de un siglo.

Dividiendo el numerador por el denominador resulta de cociente $4\frac{2}{3}$. Valuando este quebrado que acompaña al entero resulta que equivale á 66 años con 8 meses.

Luego los $\frac{14}{3}$ de un siglo, valen 4 siglos, 66 años i 8 meses.

183. *Valuar un quebrado* que se refiere á varias unidades.—Multiplíquese el quebrado por el entero á que se refiere, i queda reducida la operacion á valuar un quebrado que refiere á una unidad.

Ejemplo. $\frac{3}{5}$ de 4 quintales$=\frac{12}{5}$ de un quintal.

184. *Valuar un quebrado* que se refiere á otro ú otros quebrados i á una ó varias unidades.—Multiplíquense los quebrados entre sí, i queda reducida la operacion á valuar un quebrado que se refiere á una ó á varias unidades.

Ejemplos. 1° $\frac{3}{5}$ de $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{10}$ de un dia$=\frac{6}{150}$ de undia.

2.° $\frac{4}{5}$ de $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{10}$ de \$88$=\frac{24}{150}$ de \$88.

Máximo comun divisor i mínimo comun múltiplo de los quebrados.

185. *Máximo comun divisor.*—Para hallar el m. c. d. de los quebrados, hállese el m. c. d. de los numeradores, i á lo que resulte póngase por denominador el denominador comun si lo tienen.

Si los quebrados no tienen un comun denominador redúzcanse á él, i procédase como queda dicho.

Ejemplos.

1.° m. c. d. de $\frac{8}{11}, \frac{6}{11}$ i $\frac{10}{11}=\frac{\text{m. c. d. de 8, 6 i 10}}{11}=\frac{2}{11}$

2.° m. c. d. de $\frac{2}{5}, \frac{6}{7}$ i $\frac{2}{10}=$ m. c. d. de $\frac{140}{350}, \frac{300}{350}$ i $\frac{70}{350}=$

$$\frac{\text{m. c. d. de } 140,\ 30 \text{ i } 70}{350} = \frac{10}{350} = \frac{1}{35}$$

186. *Mínimo comun múltiplo.*—Para hallar el m. c. m. de los quebrados, si tienen igual denominador, hállese el m. c. m. de los numeradores, i á lo que resulte póngase por denominador el denominador comun.

Si los quebrados no tienen un comun denominador, redúzcanse á él, i procédase como queda dicho.

EJEMPLOS.

1.° m. c. m. de $\frac{4}{10}, \frac{6}{10}$ i $\frac{14}{10} = \frac{\text{m. c. m. de } 4,\ 6 \text{ i } 14}{10} = \frac{84}{10}$

2.° m. c. m. de $\frac{2}{5}, \frac{3}{4}$ i $\frac{6}{10} = \text{m. c. m. de } \frac{80}{200}, \frac{150}{200}$ i $\frac{120}{200}$

$$\frac{\text{m. c. m. de } 80,\ 150 \text{ i } 120}{200} = \frac{6000}{200} = \frac{60}{2} = 30$$

Fracciones contínuas.

187. DEFINICION.–Fraccion contínua es un quebrado compuesto de un entero que á veces no existe, mas un quebrado cuyo numerador es 1, i su denominador un entero, mas un quebrado cuyo numerador es 1, i su denominador un entero, mas un quebrado cuyo numerador es 1 i su denominador un entero, i así sucesivamente.

EJEMPLOS. 1.° $4+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{7 \text{ etc.}}}}}$ 2.° $\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{3 \text{ etc}}}}}}$

188. *Objeto de las fracciones contínuas.*—Las fracciones contínuas tienen por principal objeto en Arit-

mética, simplificar aproximadamente los quebrados irreducibles.

Los enteros 4, 3, 2, 5, 7, etc. del primer ejemplo, ó 7, 2, 3, 9, 5 etc. del segundo se llaman *cocientes incompletos.*

Las expresiones $4;\ 4+\frac{1}{3};\ 4+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2}};\quad 4+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5}}},$

$$4+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{7}}}}$$

; etc. ó sus equivalentes en quebrados comunes se llaman *fracciones reducidas ó convergentes.*

Los quebrados $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$, etc. se llaman *fracciones integrantes.*

189. *Procedimiento para hallar una fraccion contínua.*—Hállese el máximo comun divisor de los dos términos del quebrado por el método de las divisiones i los cocientes que resulten póngase de cocientes incompletos de la fraccion contínua.

Si el quebrado propuesto es impropio, el primer cociente será la parte entera de la fraccion contínua equivalente.

Ejemplos: 1.° Desarrollar el quebrado irreducible $\frac{358}{721}$ en fraccion contínua.

La operacion del m. c. d. de 721 i 358 es como sigue:

	2	71	1	1	1	
721	358	5	3	2	1	0

Luego $\frac{358}{721}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{71+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}}$

2.° Desarrollar el quebrado irreducible $\frac{536}{143}$ en fraccion contínua.

La operacion del m. c. d. de los dos términos del quebrado es como sigue:

	3	1	2	1	35	
536	143	107	36	35	1	0

Luego $\frac{536}{143} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{35}}}}$

190. *Regla* para formar las reducidas ó converjentes. —Dadas dos reducidas consecutivas se formará la siguiente, multiplicando los dos términos de la segunda reducida consecutiva, por el cociente incompleto que corresponde á la que se trata de formar, i agregando á ambos productos respectivamente los dos términos de la primera reducida consecutiva.

Ejemplo.—Hallar las reducidas de la fraccion contínua precedente.

Escribiendo en fila horizontal los cocientes incompletos i debajo de cada uno las reducidas tendremos:

Cocientes incompletos: 3, 1, 2, 1, 35

Reducidas: $\frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{11}{3}, \frac{15}{4}, \frac{536}{143}$

191. Todo quebrado irreducible se encuentra comprendido entre dos reducidas consecutivas; i se diferencia de cada una de ellas en menos de un quebrado cuyo numerador es 1 i su denominador el producto de dichas reducidas.

Así, en el ejemplo anterior, el quebrado $\frac{536}{143}$ se diferencia de $\frac{3}{1}$ i $\frac{4}{1}$ en menos de $\frac{1}{1}$; de $\frac{4}{1}$ i $\frac{11}{3}$ en menos de $\frac{1}{3}$; de $\frac{11}{3}$ i $\frac{15}{4}$ en menos de $\frac{1}{12}$.

Por consiguiente, la reducida $\frac{15}{4}$ que se diferencia del quebrado propuesto en $\frac{1}{572}$, es el valor mas aproximado á dicho quebrado; i en jeneral, la penúltima reducida

que se encuentre al desarrollar una fraccion contínua, es el quebrado proximamente igual á otro que trata de reducirse á sus menores términos.

192. Los quebrados reducibles ó cuyos dos términos tengan un factor comun pueden tambien transformarse en fraccion contínua; pero la última reducida, será un quebrado *exactamente* equivalente al quebrado propuesto.

Ejemplo.—Desarrollar en fraccion contínua el quebrado reducible $\frac{1420}{3600}$.

Operacion.

	2	1	1	6	1	1	2	
3600	1420	760	660	100	60	40	20	00

$$\frac{1420}{3608}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}}}}$$

Reducidas: $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{13}{33}$; $\frac{15}{38}$; $\frac{28}{71}$; $\frac{71}{180}$

Luego $\frac{1420}{3600}=\frac{71}{180}$

Cálculo de los quebrados decimales.

193. *Propiedades de los decimales.*—1.ª Si á la derecha de una cantidad decimal se colocan uno ó mas ceros dicha cantidad no altera de valor.

Así por ejemplo: 0'54 será igual á 0'540, 0'54,00 0'54000, etc.

2.ª *Si á* la derecha de una cantidad decimal que ter-

mina en ceros se suprimen uno ó mas de ellos, la cantidad no altera de valor.

Así por ejemplo: 0'5000 será igual á 0'500, 0'501, 0'50, 0'5.

3.ª *Si se* corre la coma decimal uno ó mas lugares hácia la derecha, se multiplica la cantidad por 1 seguido de tantos ceros como lugares se corra dicha coma.

Así por ejemplo, si en la cantidad 0'354621, corremos la coma uno, dos, tres, cuatro, cinco ó seis lugarer hácia la derecha, los resultados 3'54621, 35'4621, 354'621, 3546'21, 35462'1 i 354621, son respectivamente los productos de multiplicar la cantidad propuesta por 10, 100, 1000, 10000, 100000, 1000000.

4.ª *Si se* corre la coma uno ó mas lugares hácia la izquierda, se divide la cantidad por 1 seguido de tanros ceros como lugares se corra la coma.

Así por ejemplo, si en la cantidad 3452'481, corremos la coma uno, dos, tres, cuatro cinco ó seis lugares hácia la izquierda, los resultados 345'2481, 34'52481, 3'452481, 0'3452481, 0'03452481 i 0'003452481, son respectivamente la *décima, centésima, milésima, diezmilésima, cienmilésima i millonésima* parte de la cantidad propuesta

5.ª *Si se* suprimen ceros entre la coma i la primera cifra decimal, queda multiplicada la cantidad propiamente decimal, por 1 seguido de tantos ceros como ceros se suprimen.

Así por ejemplo, si en la cantidad 0'00035 se suprimen uno, dos ó tres ceros, los números que quedan 0'0035, 0'035 i 0'35 son respectivamente los productos de multiplicar la cantidad propuesta por 10, 100, 1000.

6.ª *Si se* interponen ceros entre la coma i la primera cifra decimal, se divide la cantidad propiamente decimal, por 1 seguido de tantos ceros como ceros se interpongan.

Así por ejemplo, si en la cantidad 0'568, se interponen uno, dos ó tres ceros entre la coma i la primera cifra decimal, los resultados 0'0568, 0'00568, i 0'000568 serán la décima, centésima ó milésima parte de la cantidad propuesta.

Adicion de decimales.

194. *Regla.*—Para sumar numeros decimales, escríbanse unos debajo de otros procurando que las comas formen columna, i procédase despues como en los enteros.

Ejemplo.—Sumar 5'52, con 0'1538, con 14'453 i con 1'25.

Operacion.

```
        5'42
       0'1538
      14'453
        1'25
      ---------
Suma  21'2768
```

Sustraccion de decimales.

195. *Regla.*—Para restar decimales, redúzcase el minuendo i sustraendo á una misma denominacion, lo cual se consigue igualando el número de sus cifras por medio de ceros colocados á la derecha de la cantidad que tenga menos. En lo demás procédase como para restar enteros.

Ejemplo,—Restar de 5'143, 0'648251.

Operacion.

```
        5'143000
        0'648251
Resta   --------
        4'494749
```

Multiplicacion de decimales.

196. *Regla.*—Para multiplicar decimales por decimales, ó decimales por enteros, multiplíquense como si fueran todos enteros, i sepárense en el producto de derecha á izquierda tantas cifras para decimales cuantas cifras decimales halla en los factores.

EJEMPLOS.—1.° Multiplicar 5'428 por 0'32.

OPERACION.

```
  5'428×
    0'32
 ---------
   10856
  16284
 ---------
Producto 1'73696
```

2.° Multiplicar 0'3621 por 143.

OPERACION.

```
  0'3621×
     143
 ---------
   10863
  14484
  3621
 ---------
Producto 517803
```

Procedimiento para encontrar aproximado i abreviadamente el producto de dos números decimales.

197. *Regla.*—Escríbase la cifra de unidades simples enteras del multiplicador, debajo de la cifra del multiplicando que exprese unidades 100 menores que el grado de aproximacion que se quiera. A la izquierda de dicha cifra de unidades colóquense las otras del multiplicador en sentido inverso, es decir las décimas, las centésimas, etc. i á la derecha de la misma cifra, las decenas, centenas, etc. en caso que halla.

Multiplíquese en seguida cada cifra del multiplicador por las que quedan en el multiplicando hácia la izquierda, desde la cifra que está encima de la que se considere en el mismo multiplicador. Colóquense los productos parciales en fila vertical unos debajo de otros, i súmense despues. Sepárense en esta suma de derecha á izquierda dos cifras decimales más de las que exprese el grado de aproximacion, suprímanse las dos últimas cifras de la derecha, i lo que quede an-

mentando una unidad á la última cifra decimal que se conserve, será el producto que se pide.

Ejemplos. 1.° Hallar el producto de 5'45216869 por 23'1426359 aproximado hasta centésimas ó lo que es lo mismo con un error menor que 0'01.

Disposicion de la operacion.

Multiplicando	5'45216869
Multiplicador invertido	9536 24132
	1090432
	163563
	5452
	2180
	108
	30
	126'1765

El producto será pues, 126'18.

2.° Hallar el producto de 0'415326896 por 0'12564a68 en menos de 0'001.

Disposicion de la operacion.

Multiplicando	0'415326896
Multiplicador invertido	8634 65210
	4153
	830
	205
	24
	0'05212

Producto=0'053

Division de decimales.

198. *Regla jeneral.*—Para dividir un decimal por un entero, un entero por un decimal ó un decimal por otro, redúzcanse el dividendo i divisor á una misma denominacion decimal si no la tienen, i los números que

resulten divídanse como si fueran enteros, completando la parte entera del cociente por decimales en caso que queden resíduos en las divisiones parciales.

Ejemplos.—1.° Dividir 0'547 por 0'6.

Agregando dos ceros al divisor para que tenga la misma denominacion decimal del dividendo, i dividiendo como enteros los números que resulten, tendremos:

547 : 600=0'91166....
5470
0700
1000
4000
4000
4000

2.° Dividir 3'461 por 0'21.

Reduciendo el dividendo i divisor á una misma denominacion tendremos:

3461 : 210=16'4800....
1361
1010
1700
0200
2000
110

3.° Dividir 5'632 por 43.

Agregando tres ceros al divisor para que tenga la misma denominacion decimal del dividendo tendremos:

5632 : 43000=0'1309....
56320
133200
042000
420000
33000

4.° Dividir 15 por 2'4631

Agregando cuatro ceros al dividendo por las cuatro cifras decimales del divisor resulta:

150000 : 24631=6'0808 ...
022140
221400
243520
218410
21362

Observaciones.—1.ª *Para* multiplicar un decimal por la unidad seguida de ceros, basta correr la coma hácia la derecha tantos lugares como ceros acompañan á la unidad.

Así 0'5428×100=54'28.

2.ª *Para* dividir un decimal por la unidad seguida de ceros, basta correr la coma hácia la izquierda tantos lugares como ceros acompañan á la unidad.

Así 0'542 : 100=0'00542.

De las aproximaciones.

189. *Cuando una* cantidad decimal consta de varias cifras, podemos tomar su valor aproximadamente, i el error que se comete al despreciar su ultima cifra es tanto mas pequeño cuanto mayor sea el número de cifras de la cantidad.

Así por ejemplo, si en las cantidades 0'54; 0'543; 0'5432 despreciamos la ultima cifra, las cantidades que resultan: 0'5; 0'54, i 0'543, tienen un error respecto de las propuestas, la primera de $\frac{4}{10}$, la segunda de $\frac{3}{100}$ i la tercera de $\frac{2}{1000}$. errores que, como se vé van siendo cada vez mas pequeños.

200. *Para expresar* aproximadamente el valor de una cantidad decimal, en menos de una parte alícuota decimal de la unidad por ejemplo 0'1; 0'01; 0'001, etc. tómese en dicha cantidad hasta la cifra del mismo órden decimal de la aproximacion, despreciando todas las demás, procurando aumentar una unidad á la primera cifra que se conserve, en caso que la primera de las que se desprecian es 5 ó mayor que 5 ó es 5 con otra ú otras cifras despues.

Sean por ejemplo las cantidades 0'5341; 0'5345; 0'5348 i 534521.

La primera aproximada hasta milésimos se convierte en 0'534; la segunda en 0'535 i lo mismo la tercera.

201. *Para aproximar* un quebrado ordinario en menos de una parte alícuota de la unidad, multiplíquese dicho quebrado por el denominador de la parte alícuota, i el entero del producto por exceso ó por defecto

con el mismo denominador de la parte alícuota dará el quebrado que se quiere.

Ejemplo.—Expresar el quebrado $\frac{13}{90}$ en menos de $\frac{1}{90}$.

Multiplicando el quebrado por 90, resulta de producto $\frac{13050}{963}$ que sacándole los enteros da 13 ó 14 proximamente. Poniendo pues á estos números por denominador 90, los quebrados $\frac{13}{90}$ ó $\frac{14}{90}$ expresan el quebrado propuesto en menos de $\frac{1}{90}$ como se desea.

Valuacion de decimales.

202. *En la valuacion* de decimales ocurren los mismos casos que en la valuacion de quebrados comunes: 1.° valuar un decimal que se refiere á una unidad; 2.° valuar un decimal que se refiere á varias unidades; 3.° valuar un decimal que se refiere á otro ú otros decimales i á una unidad i 4.° valuar un decimal que se refiere á otro ú otros decimales i á varias unidades.

Para el primer caso, multiplíquese la cantidad por las partes en que se divide la unidad á la cual se refiere, aplicando las reglas de multiplicar decimales. Si quedan decimales en el producto se seguirán valuando del mismo modo, i los enteros que resulten en cada multiplicacion parcial espresarán por su órden el valor del quebrado.

Ejemplo.—Valuar la cantidad 0'45 de 1 año.

Ditposicion del cálculo.

```
        0'45
        ×12 meses
        ------
meses 5'40
        ×30 dias
        ------
dias 12'00
```

Luego 0'45 de 1 año=5 meses, 12 dias.

Para el segundo caso, multiplíquese el decimal por el entero á que se refiere, i quedará reducida la operacion el primer caso.

Así, 0'34 de 8 quintales=2'72=2 qq. i 0'72 de 1 quintal=2 qq. 72 ℔.

Para el tercer caso, multiplíquense los decimales entre sí, i queda reducida la operacion al primer caso.

Así, 0'35 de 0'7 de 0'14 de 1 dia=0'35×0'7×0'14 de 1 dia=0'03430 de 1 dia.

Para el cuarto caso, multiplíquense los decimales entre sí, i queda reducida la operacion al segundo caso.

Así, 0'15 de 0'08 de 0'4 de 12 varas=0'15×0'08×0'4 de 12 varas=0'00490 de 12 varas.

Reduccion de un quebrado comun á decimal.

203. *Definicion.*—Reducir un quebrado comun á decimal, es hallar una cantidad decimal equivalente al quebrado comun, ó que se diferencie de él en menos de una parte alícuota decimal de la unidad.

204. *Regla jeneral.*—Para reducir un quebrado comun á decimal, divídase el numerador por el denominador, i si quedan resíduos continúense las divisiones agregando un cero á la derecha de cada uno, poniendo 0 enteros en el cociente si el quebrado es propio.

Ejemplos: 1° Reducir el quebrado $\frac{7}{13}$ á decimal.

Disposicion del cálculo.

```
7        : 13=0'538461....
70
 50
 110
  60
  80
  20
   7
```

Luego $\frac{7}{13}$=0'538461 en menos de 0'000001.

2.° Reducir el quebrado $\frac{15}{11}$ á decimal.

Disposicion del cálculo.

```
15       : 11=1'36363....
 40
  70
   40
    70
     40
```

Luego $\frac{15}{11}$=1'36363 en menos de 0'00001.

3.° Reducir el quebrado $\frac{5}{16}$ á decimal.

5 : 16=0'3125.
50
20
40
80
00

Luego $\frac{5}{16}$=0'3125 exactamente.

205. *Al reducir* un quebrado comun á decimal pueden resultar tres clases de cantidades decimales á saber: exactas, periódicas puras i periódicas mistas.

Cantidad decimal exacta es la que contiene un número limitado de cifras, i proviene por lo tanto de una division exacta.

EJEMPLOS.—0'145; 4'73; 0'1578.

Periódica pura es aquella en que á partir desde la coma se repite una misma porcion indefinidamente.

EJEMPLOS.—0'141414....; 5'213213213....; 0'8888....

Periódica mista es aquella en que la porcion que se repite indefinidamente no comienza á partir desde la coma.

EJEMPLOS.—0'4555...; 0'14919191...; 6'00132332....

206. *Reglas para* conocer cuando un quebrado ordinario produce una cantidad decimal exacta, periódica pura ó periódica mista.—1.ª Produce decimal exacta siempre que el denominador sea 2 ó 5 ó se compomga solo de factores *doses* ó *cincos* ó de ambos á la vez.

EJEMPLOS.—$\frac{7}{5}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{7}{4}$; $\frac{11}{25}$; $\frac{9}{20}$; $\frac{3}{160}$.

2.ª *Produce* periódica pura, cuando siendo el quebrado irreducible no entra en su denominador ni el factor 2 ni el factor 5.

EJEMPLOS.—$\frac{7}{11}$; $\frac{8}{3}$; $\frac{10}{17}$; $\frac{1}{9}$.

3.ª *Produce* periódica mista, cuando siendo el quebrado irreducible, contiene en su denomidador además del factor 2 ó 5 otro factor distinto.

EJEMPLOS.—$\frac{7}{15}$; $\frac{6}{35}$; $\frac{11}{18}$; $\frac{4}{22}$.

Advertencia.—Una cantidad periódica pura por ejemplo 0'1414....se lée. *cero enteros* 14 *de periodo*; i una periódica mista por ejemplo 0'42888...., se lée: *cero enteros*, 42 *centésimas* i 8 *de periodo.*

207. *Las fracciones* decimales periodicas cuya única cifra periódica es 9 no son otra cosa sino cantidades enteras ó decimales exactas, pues ningun quebrado ordinario no convertible exactamente en decimal puede producir una fraccion periódica cuya única cifra periódica sea el 9.

Segun esto la cantidad 0'999....equivale á 1; la cantidad 3'990..... equivale á 4; la cantidad 2'53999..... equivale á 2'54.

Reduccion de una cantidad decimal á quebrado comun.

208. *Llámase* quebrado jenerador ó fraccion jeneratriz de una cantidad decimal, el quebrado ordinario de donde proviene dicha cantidad.

209. *En la reduccion* de una cantidad decimal á quebrado comun distinguiremos tres casos: 1.° que la cantidad decimal sea exacta; 2.° que sea periódica pura i 3.° que sea periódica mista.

Primer caso.—Póngase por númerador toda la cantidad sin el cero de enteros i sin la coma decimal, i por denominador la denominacion decimal de la cantidad.

Ejemplos.—1.° Hallar la fraccion jeneratriz de 0'781.

Como la denominacion decimal es *milésimos* ó *mil avos*, la fraccion jeneratriz será: $\frac{781}{1000}$.

2.° Hallar la fraccion jeneratriz de 5'1381.

Como la denominacion decimal es *diezmilésimas* ó *diezmil avos*, la fraccion jeneratriz será: $\frac{51381}{40000}$.

210. 2.° *Caso.*—Póngase por numerador un periodo i por denominador tantos nueves como cifras tiene el período.

Si hai enteros en la cantidad se agregarán al quebrado que resulte.

Ejemplos.-1.° Hallar la fraccion jeneratriz de 0'454545

Poniendo por numerador 45 que es el periodo, i por denominador dosnueves por las dos cifras que tiene el periodo, resulta:

Fraccion jeneratriz de 0'454545.... $=\frac{45}{99}$.

2.° Hallar la fraccion jeneratriz de 8'777....

Siguiendo la misma regla tendremos: que la fraccion jeneratriz de la parte púramente decimal es $\frac{7}{9}$, luego la de toda lo cantidad propuesta será $8+\frac{7}{9}=\frac{79}{9}$.

211. *Tercer caso.*—Réstese de la parte no periódica seguida de un periodo la parte no periódica, i la resta será el numerador. Por denominador pónganse tantos nueves como cifras tenga el período, seguidos de tantos ceros cuantas cifras no periódicas hai.

Si hai enteros en la cantidad se agregarán al quebrado que resulte.

Ejemplos.—1.° Hallar la fraccion jeneratriz de 0'45333

La parte no periódica es 45 i el periodo es 3, por consiguiente el numerador de la fraccion jeneratriz será 453—45, i el denominado 900, Luego:

Fraccion jeneratriz de 0'45333.... $=\frac{453-45}{900}=\frac{408}{900}$.

2.° Hallar la fraccion jeneratriz de 6'25888...

Siguiendo la misma regla tendremos que la fraccion jeneratriz de la parte puramente decimal es $\frac{258-25}{900}=\frac{233}{900}$, luego la de toda la cantidad propuesta será $6+\frac{233}{900}=\frac{5633}{900}$.

212. *Máximo comun divisor i mínimo comun múltiplo de los decimales.*—Regla jeneral.—Redúcanse las cantidades á una misma denominacion si nó la tienen; búsquese el m. c. d. ó el m. c. m de los números que resulten como si fueran enteros, al que se le dará la misma denominacion comun de las cantidades.

Ejemplos. 1.° Hallar el m. c. d. 0'148; 2'32 i 0'8.

Reduciendo las cantidades á una misma denominacion se convierten en 0'148; 2'320 i 0'800. El m. c. d. de estos números como si fueran enteros es 4, luego el de los números propuestos será 0'004.

2.° Hallar el m. c. m. de 0'36 i 3'2.

Reduciendo las cantidades á una misma denominacion resultan: 0'36 i 3'20. El m. c. m. de estos números como si fueran enteros es 2880, luego el de los números propuestos será 28'80.

CALCULO

De los números complejos

Sistemas de medidas.

213. *Se da el nombre de medida*, á un objeto ó tipo convencional establecido por la costumbre ó por la lei, para que sirva de término de comparacion respecto de las cantidades de su misma especie.

214. *Clases de medidas.*—Se conocen ocho clases de medidas á saber:

1.ª Lineales, lonjitudinales ó de lonjitud;
2.ª De pesantez, ponderales ó de peso;
3.ª De capacidad ó de contenido;
4.ª De superficie;
5.ª De solidez ó de volúmen;
6. Monetarias ó de moneda;
7.ª Temporales ó de tiempo;
i 8. De circunferencia ó circulares.

215. *Definiciones.*—Medidas lineales ó de lonjitud, son las que sirven para apreciar el largo, ancho, grueso, altura ó profundidad de los cuerpos, ó simplemente la distancia de un lugar á otro.

Medidas de pesantez, son las que sirven para determinar el *peso* de los cuerpos propiamente dicho.

Peso absoluto de un cuerpo es la presion ó atraccion que ejerce sobre el obstáculo que impide su caida, i *peso relativo* que es del que aquí se trata, es la razon del peso absoluto del cuerpo á otro cierto peso elejido por unidad.

Medidas de capacidad, son las que sirven para determinar la cabida ó contenido de los cuerpos que se suponen huecos.

Medidas superficiales, son las que sirven para determinar la magnitud relativa de una superficie.

Medidas de volúmen, son las que sirven para determinar la magnitud relativa de los cuerpos.

Medidas monetarias, son las que sirven para expresar el valor de las cantidades que se justiprecian en dinero.

Medidas temporales, son las que sirven para determinar la duracion de las cosas ó de los acontecimientos.

Medidas circulares, son las que sirven para determinar el número de partes iguales que contiene un arco cualquiera.

216. *Requisitos que debe tener* un buen sistema de medidas.—La Económia Política considera las medidas como instrumentos del *cambio*, i aconseja como condiciones indispensables en todo sistema la *sencillez* i la *uniformidad*.

Sin embargo, es tal la fuerza de las costumbres de los pueblos, que no ha sido posible hasta hoi cumplir con las indicaciones de la ciencia económica, adoptando cada cual el sistema métrico-decimal, que por su *sencillez*, exactitud é invariabilidad en sus principios, es el llamado á seguirse en todos los paises civilizados de la tierra.

217. *Necesidad é importancia del estudio de las medidas*. El comercio no puede existir sin el *cambio*, porque no puede concebirse el tránsito de las cosas de un lugar á otro con el objeto de hacer una especulacion, sin que halla algo que se cambie por algo, productos que se cambien por productos i valores que se cambien por valores. Ahora bien, como las medidas sirven para determinar las cantidades respectivas de los productos ó valores cambiados, ya sea atendiendo á su lonjitud, volúmen i superficie, á su peso, capacidad ó contenido, es preciso conocerlas detenidamente, á efecto de verificar la operacion del *cambio* con la prontitud que exijen las transaciones comerciales.

Sistema métrico-decimal.

218. *Definicion*.—Sistema métrico-decimal es el conjunto de medidas que tienen por unidad fundamental el metro.

Metro es la diez millonésima parte del cuadrante de meridiano terrestre.

219. *Formacion del metro.*—La formacion del metro llevóse á cabo por los ilustrados Matemáticos Delambre i Méchain, quienes midieron el arco de meridiano comprendido entre Dunkerque i Barcelona, combinando sus operaciones con las que Bouguer i Lacondamine habian ejecutado en el Perú. Medida así la lonjitud del cuadrante de meridiano, se dividió en diez millones de partes iguales: se construyó una regla de platino á la temperatura del hielo fundente, de lonjitud igual á una de dichas partes, i á esta regla se denominó *metro*, que etimolójicamente significa *medida*.

220. *Invencion del sistema métrico.*—El sistema métrico fué inventado por un Congreso internacional de sabios europeos que se organizó en Paris en Noviembre de 1798, mediante iniciativa i convocatoria del "Instituto Nacional;" habiendo sido adoptado oficialmente bajo el Gobierno del Rei Luis Felipe de Orleans por decreto de 4 de Julio de 1837.

221. *Unidades que constituyen el sistema.*—Las unidades que constituyen el sistema métrico son las siguientes:

1.ª Unidad de lonjitud, el *metro*.
2.ª Unidad de pesantez, el *gramo*.
3.ª Unidad de capacidad, el *litro*.
4. Unidades de superficie, el *metro cuadrado* i *el area*.
5.ª Unidades de volúmen el *metro cúbico* i *el estério*.
6.ª Unidad de moneda el *franco*.
7.ª Unidad de circunferencia el *grado centesimal*.

222. *Regla para formar los múltiplos i divisores de cada unidad principal.*—Antepónganse á la unidad, las palabras *Deca*, *Hecto*, *Kilo* i *Miria* que significan respectivamente 10, 100, 1000 i 10000 para formar los múltiplos; i las palabras *deci*, *centi i milli* que significan *décimo de*, *centésimo de*, *i milésimo de*, para formar los divisores.

Se exceptúan de esta regla, el franco i el grado cuyos múltiplos i divisores se forman sin anteponer dichas palabras.

223. *Abreviaturas usadas en el sistema métrico.*

m	metro.	D	Deca.
g	gramo.	H	Hecto.
l	litro.	K	Kilo.
m^2	metro cuadrado	M	Miria.
a	area.	d	deci.
m^3	metro cúbico.	c	centi.
e	estério	m	mili.
fr	franco.	o	grado.

Medidas de lonjitud.

224. *Unidad principal, el metro.*

MULTIPLOS.

Decámetro que contiene 10 metros.
Hectómetro ,, ,, 100 metros.
Kilómetro ,, ,, 1000 metros.
Miriámetro ,, ,, 10000 metros.

DIVISORES.

Decímetro que contiene 0'1 de metro.
Centímetro ,, ,, 0'01 de ,,
Milímetro ,, ,, 0'001 ,, ,,

Medidas de pesantez.

225. La unidad principal es el gramo.

Gramo, es el peso de un centímetro cúbico de agua destilada á la temperatura de 4 grados sobre cero, pesada en el vacío i en el termómetro centígrado.

MULTIPLOS.

Decágramo que contiene 10 gramos.
Hectógramo ,, ,, 100 gramos.
Kilógramo ,, ,, 1000 gramos.
Miriágramo ,, ,, 10000 gramos.

DIVISORES.

Decígramo que contiene 0'1 de gramo.
Centígramo ,, ,, 0'01 ,, ,,
Milígramo ,, ,, 0'001 ,, ,,

Medidas de capacidad.

226. La unidad principal es el *litro*.

Litro, es una medida por lo comun cilíndrica, cuya capacidad es la de un decímetro cúbico.

Multiplos.

De cálitro	que	contiene	10	litros
Hectólitro	,,	,,	100	,,
Kilólitro	,,	,,	1000	,,
Miriálitro	,,	,,	10000	,,

Divisores.

Decílitro	que	contiene	0'1	de	litro.
Centílitro	,,	,,	0'01	,,	,,
Mirílitro	,,	,,	0'001	,,	,,

Medidas superficiales.

227. La unidad principal es el *metro cuadrado*, ó sea un cuadrado que tiene por lado un entero.

Multiplos.

Decámetro cuadrado	que	contiene	100	metros cuadrados
Hectométro	,,	,,	100	decámetros ,,
Kilómetro	,,	,,	100	hectómetros ,,
Miriámetro	,,	,,	100	kilómetros ,,

Divisores.

Decímetro cuadrado	que	contiene	100	centímetros cuadrados
Centímetro	,,	,,	100	milímetros ,,

La unidad superficial para los terrenos es el *area* ó sea un decámetro cuadrado.

El único múltiplo del area es la *hectárea* ó sea un hectómetro cuadrado, i el único divisor es la *centiárea* ó sea un metro cuadrado.

Medidas de volúmen.

228. La unidad principal es el metro cúbico, ó sea un cubo que tiene de altura un metro, de modo que cada una de sus seis caras es un metro cuadrado.

Multiplos.

Decámetro cúbico	que contiene	1000	metros cúbicos	
Hectómetro ,,	,,	,,	1000 decámetros	,,
Kilómetro ,,	,,	,,	1000 hectómetros	,,
Miriámetro ,,	,,	,,	1000 kilómetros	,,

Divisores.

Decímetro cúbico	que contiene	1000	centímetros cúbicos	
Centímetro ,,	,,	,,	1000 milímetros cúbicos.	

La unidad de volúmen para medir la leña i maderas de construccion es el *estério*, cuya medida no es otra cosa sino un metro cúbico, con la diferencia que está dispuesto en forma de armazon ó bastidor.

El único múltiplo del esterio es el *decaestério* que contiene 10 esterios; i el único divisor es el *deciestério* que contiene la décima parte de un estério.

Medidas monetarias.

229. *La unidad* principal de moneda es el *franco*.

Franco es una moneda de plata que pesa 5 gramos i contiene 9 partes de plata pura por una de metal extraña.

Monedas de oro.

Pieza de	5	francos	que	pesa	1	gramo	i 613	milígramos
,, ,,	10	,,	,,	,,	3	,,	i 226	,,
,, ,,	20	,,	,,	,,	6	,,	i 452	,,
,, ,,	50	,,	,,	,,	16	,,	i 130	,,
,, ,,	100	,,	,,	,,	32	,,	i 260	,,

Monedas de plata.

Pieza de 5 francos que pesa 25 gramos.
,, ,, 2 ,, ,, ,, 10 ,,
,, ,, 1 ,, ,, ,, 5 ,,
,, ,, 50céntimos,, ,, 2'5 ,,
,, ,, 20 ,, ,, ,, 1 ,,

Monedas de cobre.

Pieza de 10 céntimos de franco que pesa 10 gramos.
,, ,, 5 ,, ,, ,, ,, ,, 5 ,,
,, ,, 2 ,, ,, ,, ,, ,, 2 ,,
,, ,, 1 ,, ,, ,, ,, ,, 1 ,,

Medidas de circunferencia.

230. *La unidad* principal es el grado.

Grado es la centésima parte del cuadrante de una circunferencia.

El grado se divide en 100 partes iguales que se llaman minutos; el minuto en 100 partes iguales que se llaman segundos; el segundo en 100 partes iguales que se se llaman terceros i así sucesivamente.

Los grados, minutos, segundos, terceros, etc. se indican respectivamente por medio de los siguientes signos: o $'$ $''$ $'''$ colocados en la parte superior i á la derecha de la cantidad.

Así 5°, 4′, 6″, 18‴ se leerán: 5 grados, 4 minutos, 6 segundos, 18 terceros.

231. *Ventajas del sistema métrico.*—Las ventajas principales del sistema metrico sobre cualquier otro sistema de medidas son las siguientes: 1.ª Dependiendo las unidades unas de otras, si alguna sufriere alteracion con el transcurso del tiempo, es fácil calcular otra por medio de cualquiera de las demás i exactamente igual á la primitiva, no sucediendo lo mismo en los otros sistemas, en que la inconexion entre las diferentes unidades hace imposible la resolucion de igual problema.

2.ª Las medidas del sistema métrico-decimal, tienen un tipo invariable en la naturaleza, de modo que una-

que todas variasen, solo la lonjitud del cuadrante de meridiano bastaría para determinar otras iguales á las primitivas.

3.ª Los múltiplos i divisores en el sistema métrico, se forman de una misma manera en cada clase de medidas, no sucediendo lo mismo en los otros sistemas, en que la lei de formacion es tan irregular como arbitraria, i difícil por lo tanto de retenerse en la memoria.

4.ª Para reducir unidades de orden superior á inferior ó viceversa en el sistema métrico, basta correr la coma decimal á la derecha ó á la izquierda, mientras que, para resolver igual problema en los otros sistemas es preciso emplear largas multiplicaciones i divisiones lo cual es bastante molesto.

5.ª Acomodándose la formacion del sistema métrico á la numeracion decimal, el cálculo con tales medidas es facilísimo. comparado con el de los números complejos á que da lugar la irregularidad entre los múltiplos i divisores de los otros sistemas.

6.ª En el sistema métrico, se reemplaza el uso de los quebrados ordinarios con el de los decimales, cuyas operaciones son mucho más sencillas.

Estas consideraciones están demostrando, que el sistema métrico decimal es el llamado á adoptarse en todos los paises, i cuando esto suceda, se habrá dado un ensanche prodijioso al comercio i un paso altamente progresista en las Naciones cultas de la tierra.

Medidas conocidas i jeneralmente usadas en Centro-América.

232. *Con excepcion* de Costa-Rica en que se ha adoptado como sistema de medidas el métrico-decimal, las demás Repúblicas de Centro-América carecen de un sistema legal i uniforme. Expondremos sin embargo las medidas que jeneralmente se han empleado en estos paises.

Medidas lonjitudinales.

El grado tiene	20	leguas	
La legua ,,	3	millas ó 20.000 pies	
La milla ,,	2222 $\frac{2}{9}$	varas	

La cuadra ,, 100 varas
La cuerda ,, 50 varas
La cadena ,, 25 varas
La vara ,, 3 pies ó tercias ó 4 cuartas
El pie ,, 12 pulgadas
La pulgada,, 12 líneas
La línea ,, 12 puntos

ADVERTENCIA.—En Guatemala quedó reducida la legua á 5000 varas desde que se introdujo para las mediciones la cuerda de 50 varas.

Medidas de pesantez.

233. La tonelada tiene 20 quintales
El quintal ,, 4 arrobas
La arroba ,, 25 libras
La libra (ó marco) ,, 16 onzas
La onza ,, 16 adarmes
El adarme ,, 3 tomines
El tomín ,, 12 granos

Medidas de capacidad.

234. Las medidas de capacidad para áridos que comunmente se usan son:
La fanega que tiene 2 cajas (ó 400 mazorcas si se mide maiz.)
La caja tiene 2 cuartillas
La cuartilla ,, 3 almudes ó celemines
Para los líquidos se usan:
El garrafon que tiene 5 galones
El galon ,, ,, 5 botellas
La botella ,, ,, 75 centílitros próximamente

Medidas superficiales.

135. El ejido ó fundo legal tiene 1 legua cuadrada
La Legua cuadrada tiene 9 millas cuadradas
La caballeria tiene 64 manzanas 5816'125 varas cuadradas.
La manzana tiene 10000 varas cuadradas, 4 cuerdas cuadradas ó 16 cadenas cuadradas.
La cuerda cuadrada tiene 2500 varas cuadradas.

La cadena cuadrada tiene 625 varas cuadradas.
La vara cuadrada tiene 9 pies cuadrados.
El pie cuadrado tiene 144 pulgadas cuadradas.
La pulgada cuadrada tiene 144 líneas cuadradas.
La línea cuadrada tiene 144 puntos cuadrados.

Medidas de volúmen.

236. La vara cúbica tiene 27 pies cúbicos.
El pié ,, ,, 1728 pulgadas cúbicas.
La pulgada ,, ,, 1728 líneas ,,

Medidas para el papel.

237. La bala tiene 10 resmas.
La resma ,, 20 manos.
La mano ,, 5 cuadernillos.
El cuadernillo ,, 5 pliegos.

Medidas de tiempo.

238. La edad tiene 3 tiempos.
El tiempo, milenario ó evo tiene 10 siglos.
El siglo ,, 100 años.
El ciclo solar ,, 28 años.
El ciclo lunar ,, 19 años.
La indiccion ,, 3 lustros.
El lustro ,, 5 años.
El año ,, 12 meses.
El mes tiene 28, 29, 30 ó 31 dias.
El dia ,, 24 horas.
La hora ,, 60 minutos ó 4 cuartos.
El cuarto ,, 15 minutos.
El minuto ,, 60 segundos.

Para saber cuantos dias tiene cada mes apréndase de memoria los siguientes versos:

Febrero trae 28 dias
I en los años bisiestos 29.
Setiembre, Abril, Noviembre i Junio 30
I 31 los restantes meses.

El año comun tiene 365 dias, i el año bisiesto 366 dias.

Para saber si un año es bisiesto, basta observar si

las decenas i unidades del número que representa el año componen un número divisible por 4.

Pero si el número que representa el año no tiene decenas ni unidades, entónces se observará si las centenas i millares componen un número divisible por 4.

Así, los años 1884 i 1888 son bisiestos, porque sus dos primeras cifras de la derecha componen un número divisible por 4.

Los años 1600, 1200 i 2400 tambien son bisiestos porque las centenas i millares componen un número divisible por 4.

Medidas de circunferencia.

139.	La circunferencia	tiene 4	cuadrantes.
	El cuadrante	,, 90	grados.
	El grado	,, 60	minutos.
	El minuto	,, 60	segundos.
	El segundo	,, 60	terceros, etc.

Esta division de la circunferencia se llama *sexajesimal*, i se usa mas que la division decimal porque el números 360 contiéne mas divisores diferentes que 400.

Medidas monetarias.

DE ORO.

240.	La onza	tiene 16	pesos.
	La media onza	,, 8	pesos.
	El escudo de á 4	,, 4	pesos.
	El escudo de á 2	,, 2	pesos.
	El escudito	,, 1	peso.
	El medio escudo	,, 4	reales.

DE PLATA.

El peso	tiene 8	reales ó 100	centavos.
El medio peso	,, 4	reales ó 50	,,
El de á dos	,, 2	reales ó 25	,,
El real	,, 2	medios ó 12 ½	,,
El medio	,, 2	cuartillos ó 6¼	,,
El cuartillo	,, 1	,, ó 3⅛	,,

Medidas monetarias de Guatemala segun la nueva lei de 1881.

DE ORO.

241. 1 Pieza de 5 pesos que pesa 8 gramos, 65 milígramos
1 Pieza de 2 pesos 50 centamos, que pesa 4 gramos, 32 milígramos
1 Pieza de 1 peso, que pesa 1 gramo, 612 milígramos
} lei de 900 milésimos.

DE PLATA.

1 Pieza de 1 peso que pesa 25 gramos, lei de 900 milésimos
1 Pieza de ½ peso que pesa 12 gramos, 500 milígramos, lei de 900 milé.mos

1 Pieza de 25 centavos que pesa 6 gramos, 250 milígramos
1 Pieza de 10 centavos que pesa 2 gramos, 500 milígramos
1 Pieza de 5 centavos que pesa 1 gramo, 250 milígramos
} lei de 835 milésimos.

DE COBRE.

La moneda nacional de vellon, es el *centavo*, que pesa 5 gramos, i tiene de lei 95 por ciento de cobre i 5 por ciento de nikel, con un diámetro de 25 milímetros.

Es prohibida segun dicha lei, la circulacion de las monedas extranjeras de vellon, i las fraccionarias de plata desde 50 centavos, con excepcion de las fraccionarias de los Estados Unidos.

Las demás monedas extranjeras de oro ó plata, tendrán curso legal, siempre que tengan una lei i peso igual ó superior á la moneda nacional.

Segun esto, serán de curso legal las monedas extranjeras siguientes:

DE ORO.

	valor.
Doble águila de los Estados Unidos.	$ 20
Aguila.	,, 10
Media águila	,, 5
Cuarto de águila.	,, 2'50
Dollar de los Estados Unidos.	,, 1
Libra esterlina iglesa.	,, 5
Media libra esterlina.	,, 2'50

	valor
Pieza de 20 francos de Italia, Béljica, Francia i Suiza.	$ 4
Pieza de 10 francos de Italia Béljica, Francia i Suiza.	,, 2
Pieza de 5 francos de Italia, Béljica, Francia i Suiza.	,, 1
Pieza de 20 Reichmark del Imperio Aleman.	,, 40'92
Onzas españolas i mejicanas.	,, 16
Medias onzas.	,, 8
Cuartas onzas.	,, 4
Escudos.	,, 2
Medios escudos.	,, 1
Piezas de 100 reales de vellon españolas	,, 5
Piezas de 50 ,, ,, ,, ,,	,, 2'50
Piezas de 5 pesos del Perú, Colombia, Venezuela i Chile.	,, 5

DE PLATA.

Piezas de 5 francos de Italia, Béljica, Francia i Suiza.	$ 1
Peso fuerte español.	,, 1
Pieza de un peso de Méjico, Chile, Perú i Venezuela.	,, 1
Dollar americano	,, 1
Medio dollar	,, 50 centavos
Un cuarto de dollar.	,, 25 ,,
Un dime.	,, 10 ,,
Medio dime.	,, 5 ,,

242. **Equivalencias para reducir medidas antiguas á las del sistema métrico-decimal.**

De lonjitud { 61 varas=51 metros.
1 vara=836 milímetros.

De pesantez { 1 quintal=46 kilógramos.
1 libra=460 gramos.

De capacidad { 8 celemines ó almudes=37 litros.
9 fanegas=5 hectólitros menos 1 por ciento del resultado hectólitros.
1 botella=75 centílitros.

De superficie { 10 varas cuadradas=7 metros² menos $\frac{1}{6}$ por ciento del resultado metros cuadrados.
1 manzana=6972 metros² i 25 decímetros²
1 caballeria=45'027914 Hectáreas, es decir: 45 Ha, 2 a, 79 m² i 14 dm².

De volúmen { 12 varas cúbicas=7 metros cúbicos, mas $\frac{1}{8}$ por ciento del resultado metros cúbicos

De moneda { 1 peso=5 francos.

De circunferencia { 9 grados sexajesimales=10 grados centesimales.

Reduccion de un número complejo á incomplejo de su última especie.

243. *Regla.*—Redúzcase el número de la especie superior á la especie inferior inmediata, i al resultado agrégue el número de esta especie. Redúzcase la suma á la especie inferior inmediata, i al resultado agréguese el número de esta especie i así sucesivamente.

Ejemplo.—Reducir 3 quintales, 2 @, 5 ℔, i 10 onzas á incompleto de onza.

Cálculo.

3 qq×4 @+2=14 @.
14 @×25 ℔+5=355 ℔.
355 ℔×16 onzas+10=5690 onzas.
Luego 3 qq, 2 @, 5 ℔, 10 onzas=5690 onzas.

Reduccion de un número incomplejo á otro de especie mayor.

244. *Regla.*—Divídase dicho número por el número de veces que su unidad está contenida en una de la especie superior.

Ejemplo.—Reducir 320 meses á años.

Como un mes está contenido en un año 12 veces, tendremos que 320 meses= $\frac{320}{12}$ de año.

Reduccion de un número complejo á incomplejo de una especie distinta de la inferior.

245. *Regla.*—Redúzcase el complejo á incomplejo de su última especie, i el incomplejo que resulte redúzcase á la especie que se quiere.

Ejemplo.—Reducir 5 varas, 2 pies i 4 pulgadas á incomplejo de pies.

Todo el incomplejo reducido á pulgadas equivale á 208, i este número reducido á incomplejo de pies equivale á $\frac{208}{12}$ de pie, luego 5 varas, 2 pies i 4 pulgadas $= \frac{208}{12}$ de pie.

Reduccion de un incomplejo á complejo.

246. *Regla.*—Redúzcase el incomplejo á unidades de la especie inmediata superior, i el resto serán las unidades de especie inferior del complejo. El cociente que resulte redúzcase á unidades de la especie inmediata superior, i el resto serán las unidades de la especie que signe en el complejo. Así se continuará, hasta que el último cociente séa de la especie superior del complejo.

Ejemplo.—Reducir 1426 dias á complejo.

Cálculo.

1426	30	
226	47 meses	12
16	11	3 años
dias	meses	

Luego 1426 dias=3 años, 11 meses i 16 dias.

Reduccion de un complejo á quebrado de una de sus especies.

247. *Regla.*—Redúzcase el complejo á incomplejo de la última especie, i á lo que resulte póngase por denominador una unidad de la especie á que quiera referirse el quebrado reducida á la inferior del complejo.

Ejemplo.—Reducir el complejo 5 toneladas, 6 quintales, 3 arrobas i 10 libras á quebrado de quintal.

Reducido el complejo á incomplejo de libra equivale á 10685 libras, i poniéndole á este número por denominador un quintal reducido á libras que son 100, tendremos que el complejo propuesto equivale á $\frac{10685}{100}$ de quintal.

Advertencia.—La operacion inversa, es decir la reduccion de un quebrado á complejo, se practica valuando el mismo quebrado.

Adicion de complejos.

248. *Regla.*—Colóquense los sumandos unos debajo de otros de manera que se correspondan las especies. Súmense despues como si fueran enteros, teniendo cuidado de agregar á la suma de cada columna las unidades de órden superior que resulten en las columnas de orden inferior.

Ejemplo. Sumar 3 @, 8 ℔, i 8 onzas, con 2 @, 12 ℔, i 15 onzas, con 1 @, 10 ℔, i 11 onzas.

Operacion.

3 @—	8 ℔—	8	onzas
2 @—	12 ℔—	15	onzas
1 @—	10 ℔—	11	onzas
Suma 7 @—	7 ℔—	2	onzas

Sustraccion de complejos.

249. *Regla.*—Cóquese el sustraendo debajo del minuendo de modo que se correspondan las especies.

Réstese en seguida cada número del sustraendo de su correspondiente en el minuendo comenzando por las unidades de orden inferior.

Si algun término del minuendo es menor que su respectivo en el sustraendo, agréguese á dicho término una unidad de la especie inmediata superior, reducida á la especie de que se trata; i para que la resta no altere, considérese esa especie inmediata superior del minuendo con una unidad menos.

Ejemplo. 1.°—Averiguar la edad de una persona que nació el 7 de Marzo de 1860, hasta el 19 de Julio de 1885.

Para resolver esto, considérese de minuendo los años, meses i dias cabales transcurridos hasta la fecha en que se propone la cuestion, i de sustraendo los años, meses i dias transcurridos hasta la fecha del nacimiento de la persona.

Así pues tendremos:

Minuendo	1884 años	—6 meses	—19 dias.
Sustraendo	1855 ,,	—2 ,,	—7 ,,
Resta	25 años	—4 meses	—12 días.

2.° Restar de 13 quintales, 2 arrobas, 10 libras i 12 onzas, 9 quintales, 3 arrobas, 4 libras i 15 onzas.

Operacion.

Minuendo	13 qq.	—2 @	—10 ℔.	—12 onzas.
Sustraendo	9 ,,	—3 ,,	—4 ,,	—15 ,,
Resta	3 qq.	—3 @	—5 ℔.	—13 onzas.

En este ejemplo hemos agregado á las 12 onzas del minuendo 1 libra reducida á onzas, considerando las 10 libras del minuendo con el valor de 9.

Del mismo modo hemos agregado á las 2 @ del minuendo 1 quintal reducido á arrobas, considerando los 13 qq. del minuendo con el valor de 12.

Multiplicacion de complejos.

250. *Primer caso.*—Multiplicando complejo i multiplicador incomplejo,

Regla.—Multiplíquense todos los términos del multiplicando por el incomplejo del multiplicador, comenzando por las unidades inferiores i teniendo cuidado de ir agregando á cada producto las unidades de especie superior que vayan resultando en los productos anteriores.

Ejemplo.–Averiguar cuánto podrá comprarse con $5 pesos, suponiendo que con uno se compran 3 varas, 2 pies i 9 pulgadas.

OPERACION,

Multiplicando 3 varas—2 pies—9 pulgadas.
Multiplicador $5.

Producto 19 varas—1 pie—9 pulgadas.

251. *Segundo Caso.*-Multiplicando incomplejo i multiplicador complejo.

Primer procedimiento.—Redúzcase el complejo á quebrado de la especie superior, i multiplíquese este quebrado por el incomplejo, valuando el producto que resulte.

EJEMPLO.—Averiguar cuanto cuestan 3 @—5 ℔—i 10 onzas de café, suponiendo que 1 arroba cuesta $5.

OPERACION.

$5×[3 @—5 ℔—10 onzas]=$5 × $\frac{1290}{400}$ de 1 @= $\frac{6450}{400}$ de 1 peso=$16'12.

252. 2.° *Procedimiento por partes alícuotas.*

Multiplíquese todo el multiplicando por las unidades de especie superior del multiplicador, como en el primer caso.

En seguida descompónganse los otros términos del multiplicador en partes alícuotas de la unidad principal, i se irán tomando del multiplicando ó de los productos que resulten, las partes que expresen dichas partes alícuotas.

Resolvamos por este método el ejemplo anterior.

OPERACION.

$5 ×
3 @—5 ℔—10 onzas

Producto por 3 @=.....$15
,, ,, 5 ℔=..... 1
,, ,, 8 onzas=..... 0'10
,, ,, 2 onzas=..... 0'02

Producto $16'12

Para hallar el producto en este ejemplo raciocinamos así: si 1 arroba cuesta $5, 3 @ costarán $15, i 5 ℔ que son la quinta parte de 1 arroba costarán la quinta parte de $5 es decir $1.

Como 10 onzas no son parte alícuota de la libra, las descompondremos en 8 onzas mas 2 onzas. I si 5 libras cuestan $1, una costará 20 centavos, luego 8 onzas que son la mitad de una libra costarán 10 centavos, i 2 onzas costarán 2 centavos.

Tercer Caso.—Multiplicando i multiplicador complejos.

253. *Primer procedimiento* —Redúzcanse los dos factores á quebrado de la especie superior i multiplíquense los quebrados que resulten valuando el producto de ellos con relacion á la unidad principal del multiplicando.

Ejemplo.—Supongamos que se quiere saber cuanto puede comprarse con $10, 5 reales i 3 cuartillos, suponiendo que con un peso se pueden comprar 2 arrobas, 11 libras i 4 onzas de una mercadería.

Operacion.

[2 @—11 ℔—4 onzas]×[$10-5 reales—3 cuartillos]= $\frac{\text{pe}}{\text{de}}$ de @ × $\frac{349}{32}$ de peso=$\frac{336140}{12800}$ de @=26 @—6 ℔—8 onzas —6 adarmes.

254 2.° *Procedimiento por partes alícuotas.*-El método de las partes alícuotas se practica en este caso lo mismo que en el segundo. Así es, que para resolver la cuestion anterior dispondremos el cálculo como sigue:

Multiplicando.....2 @—11 ℔—4 onzas
Multiplicador..... $10—5 rls.—3 centavos

Producto del multiplicando por				$10..	24 @	—12 ℔	—8 onzas	
id	id	id	id	4rls.1	„ — 5	„ —10	„	
id	id	id	id	1rls.0	„ — 7	„ —10	„—8	adarmes
id	id	id	id	2cuarts.0	„ — 3	„ —13	„—4	„
id	id	id	id	1 „ 0	„ — 1	„ —14	„—10	„
			Suma		26@,	6℔,	8onzas	6 admes

Para hallar el producto raciocinaremos así: si con un peso se compran todo el multiplicando, con $10 se

comprará diez veces el multiplicando ó se 24@—12℔—8 onzas.

Como 5 reales no son parte alícuota de 1 peso; los descompondremos en 4 reales mas 1 real; i si con un 1 peso se compra todo el multiplicando, con 4 reales se comprará la mitad, ó sea 1 @—5 ℔—10 onzas, i con 1 real la cuarta parte de lo que compra con 4 reales ó sea 7 ℔—10 onzas—8 adarmes.

Por último como 3 cuartillos no son parte alícuota de 1 real, los descompondremos en 2 mas 1; i si con 1 real se compran 7 ℔—10 onzas i 8 adarmes, con 2 cuartillos se comprará la mitad ó sean 3 ℔—13 onzas i 4 adarmes, i con 1 cuartillo la mitad de lo que se compra con 2, ó sean 1 ℔—14 onzas—10 adarmes.

Division de Complejos.

255. *Primer caso.*—Dividendo complejo i divisor incomplejo.

Regla.—Divídase cada término del dividendo por el incomplejo del divisor comenzando por las especies superiores, teniendo cuidado de ir reduciendo los resíduos que queden, á unidades de la especie inferior inmediata, i agregarles las unidades de esta especie que tenga el dividendo.

Ejemplo.—Averiguar en cuanto tiempo podrá caminarse una legua, suponiendo que 20 se caminan en 25 dias, 8 horas, 12 minutos i 30 segundos.

Operacion.

25 dias. 8 horas 12 mtos. 3 segdos. | 20 leguas
resíduo 5 ,, | 1 dia—6 horas
× 24 horas | 24 minutos-36
120+8=128 horas. 2.° dividendo | segundos, —9
resíduo 8 ,, | terceros.
× 60 minutos
480+12=492 minutos, 3.er dividendo
resíduo 12 ,,
× 60
720+3=723 segundos, 4.° divid.°
resíduo 3 ,,
× 60
180 terceros, 5.° divid.°

Luego 1 legua se camina en 1 dia, 6 horas, 24 minutos, 36 segundos i 9 terceros.

256. 2.° *Caso.*—Dividendo incomplejo i divisor complejo.

Regla.—Redúzcase el complejo á quebrado de la unidad principal, i queda reducida la operacion á dividir un entero por un quebrado.

Ejemplo.—Averiguar cuanto se gana en un año, suponiendo que en 8 años, 10 meses i 22 dias se ganan $2580.

Operacion.

$2580÷(8 años—10 meses—22 dias)=2580÷$\frac{2}{360}$=$\frac{2580}{2/360}$ de $1=$290'07.

Luego en un año se ganan 290 pesos con 7 centavos.

257. *Tercer caso.*—Dividendo i divisor complejos.

Regla.—Redúzcanse el dividendo i divisor á quebrados de la unidad principal, i queda reducida la operacion á dividir un quebrado por otro.

Ejemplo.—Averiguar en cuanto tiempo se llena de agua un decámetro cúbico, suponiendo que 6 decámetros^3, 25 metros^3 i 20 decímetros^3 se llenan en 1 dia, 10 horas i 15 minutos.

Operacion.

[1 dia—10 horas-15 minutos]÷[6 Dm^3—25 m^3—20 dm^3] =$\frac{2055}{1440}$ de dia÷$\frac{6025020}{1000000}$ de decámetro^3=$\frac{2055000000}{8676028800}$ de dia=5 horas —41 minutos—4 segundos.

Advertencia.—Para reducir un complejo á decimal, redúzcase á quebrado ordinario, i este á cantidad decimal segun sabemos.

ELEVACION A POTENCIAS.

258. *Definicion.*—Potencia de un número es el producto que resulta de multiplicarlo por sí mismo una ó mas veces.

Division de las potencias.—Las potencias se dividen en grados: así, hai potencias de 2.° grado ó cuadrados; de 3.er grado ó cubos; de 4.° grado ó bicuadrados; de 5.°, 6.°, 7.°, etc. grados.

Indicacion de una potencia.—Para indicar la potencia de un número, se escribe á su derecha i en la parte superior otro pequeño número que se llama exponente i será 2, 3, 4, etc. segun que se quiera indicar el cuadrado, cubo cuarta potencia, etc. Si el número se compone de dos ó mas términos, enciérrese entre paréntesis poniendo afuera el exponente.

El exponente indica pues el grado de una potencia, i además las veces que el número cuya potencia se busca debe repetirse por factor.

La primera potencia de un número se considera que es el mismo número.

259. *Regla general para hallar la potencia cualquiera de un número.*—Repítase el número por factor tantas veces como unidades tenga el exponente: efectúese el producto i este será la potencia.

Ejemplos.—1.° Hallar el cubo de 30.

Resolucion: $30^3=30\times30\times30=27000$.

2.° Hallar la quinta potencia de $\frac{3}{10}$.

Resolucion: $[\frac{3}{10}]^5=\frac{3}{10}\times\frac{3}{10}\times\frac{3}{10}\times\frac{3}{10}\times\frac{3}{10}=\frac{243}{100000}$.

3.° Hallar el cuadrado de 2'14.

Resolucion: $(2'14)^2=2'14\times2'14=4'5796$.

4.° Hallar el cubo de 2 meses, 4 dias.

Resolucion: [2 meses, 4 dias]^3=[$\frac{64}{30}$ de mes]^3=$\frac{64}{30}\times\frac{64}{30}\times\frac{64}{30}$ $=\frac{262144}{27000}$de mes=9 meses, 21 dias, 6 horas, 30 minutos, 24 segundos.

260. *Tabla de los cuadrados i cubos de los números díjitos.*

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Cuadrados	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
Cubos	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

Advertencia.—Esta tabla debe aprenderse de memoria.

261. *Cuadrado de la suma de dos cantidades.*— El cuadrado de la suma de dos cantidades se compone de *tres* partes que son: cuadrado de la primera; doble de la primera multiplicado por la segunda i cuadrado de la segunda.

Ejemplo.—$[5+8]^2=5^2+2.5\times8+8^2$.

Segun esto, el cuadrado de todo número que conste de decenas i unidades es igual: al cuadrado de las de-

cenas, mas duplo de las decenas multiplicado por las unidades i mas el cuadrado de las unidades.

EJEMPLO.—34^2=[3 decenas+4 unidades]^2=3 decenas^2 +2×3 decenas×4 unidades+4 unidades^2.

262. *Cubo de la suma de dos cantidades.*—El cubo de la suma de dos cantidades se compone de *cuatro* partes que son: cubo de la primera; triple del cuadrado de la primera multiplicado por la segunda; triple de la primera multiplicado por el cuadro de la segunda, i cubo de la segunda.

EJEMPLO.—$[4+6]^3=4^3+3.4^2\times6+3.4\times6^2+6^3$.

Segun esto, el cubo de todo número que conste de decenas i unidades es igual: al cubo de las decenas, mas el triple del cuadrado de las decenas multiplicado por las unidades, mas el triple de las decenas multiplicado por el cuadrado de las unidades i mas el cubo de las unidades.

EJEMPLO.—158^3=15 decenas^3+3.15 decenas^2×8+3.15 decenas×8 unidades^2+8 unidades^3.

263. *Diferencia entre los cuadrado de los números consecutivos.*—La diferencia entre los cuadrados de dos números consecutivos es igual al duplo del menor mas 1. [1.]

EJEMPLO.—$15^2-14^2=2\times14+1=29$.

Problema.—Conocida la diferencia entre los cuadrados de dos números consecutivos encontrar estos números.

Resolucion.—Réstese de la diferencia dada 1, i la mitad del resultado será el número menor. Agregando al menor 1 tendremos el mayor.

EJEMPLO.—Si tenemos dos terrenos cuadrados, en que el uno contiene 359 metros cuadrados más que el otro, para hallar el largo de cada uno restaremos de la diferencia una unidad, i la mitad de 358 que es 179 será el largo del terreno menor: el largo del mayor será 180.

En efecto: $180^2-179^2=32400-32041=359$ diferencia conocida.

263. *Diferencia entre los cubos de dos números con-*

(1) Llámanse números consecutivos los que se diferencian e unas unidad entera como 7, i 8; 4'3 i 5'3; $\frac{3}{5}$ i $1\frac{3}{5}$.

secutivos.—La diferencia entre los cubos de dos números consecutivos es igual al triple del cuadrado del menor, mas el triple del mismo número menor mas 1.

Ejemplo.—$10^3-9^3=3\times9^2+3\times9+1=271$.

264. *Proposiciones acerca de las potencias.*—1.ª Las potencias de los números menores que 1, son siempre menores que 1 i van decreciendo á medida que crece el esponente.

Así, considerando el número $\frac{5}{7}$ que es menor que 1, se verifica que $\frac{5}{7}>[\frac{5}{7}]^2>[\frac{5}{7}]^3>[\frac{5}{7}]^4>[\frac{5}{7}]^5$ etc. siendo todas estas potencias menores que la unidad.

2.ª Las potencias de los números mayores que 1, son siempre mayores que 1, i van creciendo á medida que crece el esponente.

Así, considerando el número $\frac{7}{5}$ que es mayor que 1, se verifica que $\frac{7}{5}<[\frac{7}{5}]^2<[\frac{7}{5}]^3<[\frac{7}{5}]^4<[\frac{7}{5}]^5$, siendo todas estas potencias mayores que la unidad.

3.ª El producto de varias potencias indicadas de un mismo número, es igual á este mismo número con un exponente que sea la suma de los exponentes de los factores.

Así, $4^3\times4^6\times4^2=4^{3+6+2}=4^{11}$.

4.ª El cociente de dos potencias indicadas de un mismo número es igual, á este mismo número con un esponente que sea la diferencia entre el exponente del dividendo i el exponente del divisor.

Así, $8^5\div8^2=8^{5-2}=8^3$.

5.ª La potencia de un producto indicado, es igual al producto de las potencias del mismo grado de cada uno de los factores.

Así, $[3\times5\times4]^3=3^3.\ 5^3.\ 4^3$.

6.ª La potencia de un cociente indicado, es igual á la potencia del dividendo partida por la potencia del mismo grado del divisor.

Así, $[7:4]^5=7^5:4^5$; $[\frac{3}{5}]^4=\frac{3^3}{5^3}$

7.ª La suma de dos cantidades multiplicada por su diferencia es igual al cuadrado de la primera menos el cuadrado de la segunda.

Así, $(5+4)\times(5-4)=5^2-4^2$.

8.ª Para elevar una potencia indicada á otra potencia se multiplican los dos esponentes i el producto será el esponente de la potencia total.

Asi, el cubo de la potencia indicada 15^3 será igual á 15^6.

EXTRACCION DE RAICES.

265. *Definicion de raiz.*—Raiz de un número es otro número que elevado á una potencia cuyo grado sea el grado de la raiz produce el número propuesto.

Así pues, raiz cuadrada ó cúbica de un número es otro número que elevado al cuadrado ó al cubo produce el número propuesto.

266. *Division de las raices.*—Las raices, lo mismo que las potencias se dividen en grados. Así, hai raices de 2.° grado ó cuadradas; de 3.er grado ó cúbicas; de 4.° grado ó bicuadradas; de 5.° grado, de 6.° etc.

267. *Indicacion de las raices.*—Para indicar una raiz se usa el signo $\sqrt{}$ que se llama signo radical debiendo colocar el número cuya raiz se indica debajo de la línea horizontal del mismo signo, i el grado de la raiz en la parte superior del ángulo.

El número que indica el grado de la raiz se llama *índice radical*, i puede no expresarse cuando se trate de la raiz cuadrada.

Ejemplos.—La raiz cuadrada de 15; la raiz cúbica de 0'25, i la de octavo grado de 364, se indicarán respectivamente como sigue: $\sqrt{15}$; $\sqrt[3]{0'25}$; $\sqrt[8]{364}$.

268. *Raiz de un producto indicado.*—La raiz de un producto indicado es igual al producto de las raices del mismo grado de cada uno de los factores.

Así, por ejemplo: $\sqrt{4.9.15} = \sqrt{4} \times \sqrt{9} \times \sqrt{15}$

269. *Raiz de un cociente indicado.*—La raiz de un cociente indicado es igual á la raiz del dividendo partida por la raiz del mismo grado del divisor.

Así, por ejemplo: $\sqrt[3]{15:4} = \sqrt[3]{15} : \sqrt[3]{4}$; $\sqrt{\frac{1}{9}} = \sqrt{1} : \sqrt{9}$.

270. *Raices de los números mayores ó menores que* 1.—Las raices de los números mayores que 1 son mayores que 1 i menores que los mismos números.

Así la raiz cúbica de 8 que es mayor que 1 es: 1.°> 1, i 2.°<8.

Las raices de los números menores que 1 son menores que 1 i mayores que los mismos números.

Así, la raiz cuadrada de $\frac{3}{5}$ que es menor que 1 es: 1.° <1, i 2.°> $\frac{3}{5}$.

271. *Si un número entero* no tiene por raiz exacta otro número entero, tampoco podrá tener por raiz exacta un número fraccionario. I las raices que no pueden expresarse exactamente por ningun número entero ni fraccionario, se llaman *raices inconmensurables.*

Raiz cuadrada de los enteros.

272. *Raiz cuadrada entera* de un número, es la raiz cuadrada del mayor cuadrado contenido en dicho número.

Así raiz cuadrada entera de 29 será la del número 25 que es el mayor cuadrado contenido en 29.

273. *Llámase resto ó resíduo* de la raiz, la diferencia entre el número dado i el mayor cuadrado contenido en dicho número.

Así el resíduo de raiz cuadrada de 38, será la diferencia entre 38 i 36 que es el mayor cuadrado contenido en 38

La diferencia entre la raiz cuadrada total de un número i su raiz cuadrada entera es siempre menor que 1.

Se dice que una raiz es exacta cuando al extraerse no deja resíduo, i que es inexacta en el caso contrario.

274. *Para extraer la raz cuadrada entera* de los números que no pasan de 100 ni bajan de 1, basta aprender de memoria la siguiente tabla:

$\sqrt{1}$,	$\sqrt{4}$,	$\sqrt{9}$,	$\sqrt{16}$,	$\sqrt{25}$,	$\sqrt{36}$,	$\sqrt{49}$,	$\sqrt{64}$,
1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,
			$\sqrt{81}$,	$\sqrt{100}$,			
			9,	10,			

Segun esta tabla, la raiz cuadrada entera de 25 es 5; la de 15 es 3; la de 60 es 8; la de 51'14 es 7; la de $4\frac{3}{7}$ es es 2; etc.

274. *Regla para extraer la raiz cuadrada de los enteros mayores que* 100.

Divídase el número en porciones de dos en dos cifras de derecha á izquierda, i no importa que la última porcion tenga solo una cifra,

Hállese la raiz cuadrada entera de la primera porcion hacia la izquierda i así se tendrá la primera cifra de la raiz.

El cuadrado de esta cifra réstese de la misma porcion i colóquese á la derecha de la resta la porcion siguiente, separando en el número que resulte la última cifra de la derecha.

Lo que quede á la izquierda divídase por el doble de la raiz hallada.

El cociente escríbase á la derecha de ese doble, i si (1) al multiplicar el número que resulta, por el cociente hallado, se obtiene un producto que puede restarse del dividendo, inclusive la cifra separada, dicho cociente es la segunda cifra de la raiz. Pero si dicho producto no puede restarse, se le quitan al cociente una ó mas unidades hasta que se pueda verificar la sustraccion.

Al lado de la resta colóquese la porcion siguiente: sepárese la cifra de la derecha i divídase lo que queda á la izquierda por la suma del divisor anterior modificado con su cociente, ó sea el doble de la raiz hallada.

El cociente se comprobará como queda dicho i se proseguirá la operacion del mismo modo, hasta que se haya bajado la primera porcion de la derecha i encontrado la última cifra de la raiz i el resíduo correspondiente.

Ejemplo.— Extraer la raiz cuadrada entera de 5842791.

Disposicion del calculo.

$\sqrt{5.84.27.91}$	2417 Raiz
18.4.....	44 }
	4
082.7...	481 }
	1
3469.1.	4827 }
Resíduo 0902..	7

Explicacion de la operacion.—Dividido el número en porciones de dos en dos cifras se extrajo la raiz cuadrada de 5 que es el 2. El cuadrado de esta raiz

(1) el núm. que resulte de operar el cocie. tiene el doble del

que es 4 restóse de la primera porcion quedando 1 de resíduo. Al lado de este resíduo se colocó la segunda porcion 84, i en el número 184 se separó la cifra de la derecha, dividiendo lo que quedó á la izquierda por el duplo de la raiz hallada. A la derecha de este duplo que es 4 se colocó el cociente que fué tambien 4, i como al multiplicar ese divisor modificado por el mismo cociente, se obtuvo un producto que pudo restarse de 184, resultó ser 4 la segunda cifra de la raiz quedando 8 de resíduo. Al lado de este resíduo se colocó la tercera porcion 27; i en el número 827 que quedó, separóse la cifra de la derecha, dividiéndose 82 por 48 que es la suma del divisor modificado 44 con el cociente 4 ó el duplo de la raiz hallada 24. A la derecha de dicho duplo se escribió la cifra 1 del cociente, i como al multiplicar este cociente por el divisor modificado 481, resultó un producto que pudo restarse de 827, se dedujo ser 1 la tercera cifra de la raiz, quedando de resto 346. Al lado de este resto colócose la última porcion 91, i en el número resultante 34691 se separó la cifra 1 de la derecha dividiéndose 3469 que quedó á la izquierda por 482, suma del cociente anterior 1 con el divisor modificado 481 i cuya suma es el duplo de la raiz hallada 241. El cociente de la division que fué 7 se colocó á la derecha del divisor 482, i como al multiplicar dicho cociente por el divisor modificado 4827 se obtuvo un producto que pudo restarse de 34691 resultó ser 7 la cuarta i última cifra entera de la raiz, quedando de resíduo 902.

Advertencia.—Una raiz cuadrada tiene tantas cifras cuantas sean las porciones en que se descomponga el número.

Raiz Cuadrada de los decimales.

275. *Regla.*—Para extraer la raiz cuadrada de un decimal, procúrese que el número de cifras decimales sea par, lo que se consigue colocando á su derecha un número impar de ceros cualquiera. Extráigase en seguida la raiz como si el número fuera entero, separándo en ella de derecha á izquierda tantas cifras para decimales como porciones decimales de dos cifras tenga el número propuesto modificado.

EJEMPLO.—Extraer la raiz cuadrada de 8'14325.

CALCULO.

$\sqrt{8'14325} = \sqrt{8'14.32.50}$	2'853 Raiz
41.4.....	48
	8
303.2 ..	565
	5
2075.0 .	5703
Resíduo 364 1 .	3

Raiz cuadrada de los quebrados comunes.

276. *Regla.*—Para extraer la raiz cuadrada de un quebrado comun, conviértase el quebrado en cantidad decimal i procédase en lo demás como la regla anterior.

EJEMPLO.—Extraer la raiz cuadrada de $\frac{25}{50}$.

CALCULO.

$\sqrt{\frac{25}{50}} = \sqrt{0'83.33.33}$	0'912 Raiz
23.3	181
	1
523.3	1822
Resíduo 158 9	2

Si se quiere extraer la raiz cuadrada de un misto redúzcase á quebrado i quedará referida la operacion al caso anterior.

Si se quiere extraer la raiz de un número complejo, redúzcase á incomplejo de su especie inferior, i en lo demás procédase como para extraer la raiz cuadrada de un entero.

Aproximacion de la raiz cuadrada.

277. *Regla.* Para aproximar la raiz cuadrada de un número, continúese la operacion colocando á la derecha del último resíduo i de los demás que resulten, dos ceros, por cada cifra decimal que se quiera de aproximacion.

EJEMPLOS. 1.°—Extraer la raiz cuadrada de 7 aproximándola hasta centésimas.

CALCULO.

$\sqrt{7}$.....	2'64 Raiz
300....	46
	6
240.0..	524
Resíduo 30.4..	4

2.° Extraer la raiz cuadrada de 0'4532 aproximándola con dos cifras decimales ó sea hasta diez milésimos.

CALCULO.

$\sqrt{0'45.32}$.....	0'6731 Raiz
93. 2.....	127
	7
0430.0.....	1343
	3
2710.0....	13461
1363 0....	1

278. *Para extraer la raiz cuadrada* de un número con un error menor que una parte alícuota de la unidad, multiplíquese dicho número por el cuadrado del denominador de la parte alícuota: extráigase la raiz cuadrada del producto i divídase dicha raiz por el mismo denominador de la parte alícuota.

EJEMPLO.—Extraer la raiz cuadradra de 8 en menos de $\frac{1}{11}$.

CALCULO.

$8 \times 11^2 = 968$; $\sqrt{968} = 31$, luego $\sqrt{8}$ en menos de $\frac{1}{11} = \frac{31}{11}$

279. *Cuando el número* cuya raiz cuadrada se busca tuviere muchas cifras, puede encontrarse aproximadamente, extrayendo la raiz del número hasta hallar más de la mitad del número de cifras de la raiz, dividiendo en seguida el resíduo, por el duplo de la raiz hallada i el cociente expresará lo que falta de la raiz.

EJEMPLO.—Extraer la raiz cuadrada de 15.72.48.10. 20.34.

La raiz de este número, segun la advertencia del

parrafo 174 debe tener seis cifras. Hallando entónces las 4 primeras tendremos 3965 quedando de resíduo 35852034. Dividiendo ahora este resíduo por 793000, q ue es el duplo de la raiz halla tendremos de cociente entero 45.

Luego la raiz cuadrada del número propuesto será 396545.

280. *Prueba de la raiz cuadrada.*—Para probar la raiz cuadrada, súmese el cuadrado del número que forman las cifras encontradas en ella con el resíduo de la misma, i la suma, si la operacion está bien hecha debe dar la cantidad subradical.

Ejemplo.—Siendo 5'56 la raiz cuadrada de 31, i 864 el resíduo, tendremos que $[5'56]^2+864=31$ ó sea el número propuesto.

Observaciones. 1.ª Todo número que termine en 2, 3, 7 ú 8, ó en un número impar de ceros ó de cifras decimales no puede tener raiz cuadrada exacta.

2.ª La raiz cuadrada de un número que exprese medidas cuadradas da medidas lineales.

Problemas de raiz cuadrada.

281. 1.° Un comerciante compró por la cantidad de $16148'35 cierto número de metros cúbicos de mármol, costando cada metro tantos pesos como métros se compraron, ¿cuántos son los metros comprados, i cuánto costó cada uno?

2.° Siendo la diferencia de dos números 3, i la diferencia de sus cuadrados 81, ¿cuáles son esos dos números?

3.° Hallar un número cuyos $\frac{3}{5}$ de sus $\frac{4}{7}$ dé por producto 3684.

4.° Un campo cuadrado se ha sembrado de árboles á 1 metro de distancia, ¿cuántos hay en cada lado, suponiendo que el campo tiene 189225 árboles?

5.° Se quiere circunvalar de paredes una poblacion cuadrada que tiene 1576 hectareas i 72 metros cuadrados, ¿qué largo deberá tener cada pared?

6.° Hallar dos números cuyo producto es 180 i cuya diferencia es 3.

7.° Si la altura de un rectángulo es doble de su base i su area de 68974 áreas ¿cuáles son la base i la altura del rectángulo?

8° Se ha enlozado una sala cuadrada con 1425 baldosas de 11 centímetros por lado cada una, ¿cuántos metros contiene dicha sala por lado?

9.° En una casa hai una puerta cuadrada que tiene 2 varas i media por lado, i deseando agrandarla de modo que deje pasar el triple i $\frac{2}{5}$ mas de luz, ¿cuántas varas por lado deberá tener la nueva puerta?

Extraccion de la raiz cúbica.

282. *Llámase raiz cúbica entera*, de un número, la raiz cúbica del mayor cubo contenido en dicho número.

La diferencia entre la raiz cúbica total de un número i su raiz entera es menor que 1.

Resíduo de la raiz cúbica es la diferencia entre el número propuesto i el cubo mayor contenido en él.

283. *Raiz cúbica de los enteros que no pasan de* 1000.—Para extraer la raiz cúbica de un entero que no pase de 100, apréndase de memoria la siguiente tabla:

$\sqrt[3]{1.}$	$\sqrt[3]{8,}$	$\sqrt[3]{27,}$	$\sqrt[3]{64,}$	$\sqrt[3]{125,}$	$\sqrt[3]{216,}$	$\sqrt[3]{343,}$
1.	2,	3,	4,	5,	6,	7,

$\sqrt[3]{512,}$	$\sqrt[3]{729,}$	$\sqrt[3]{1000.}$
8,	9,	10.

Segun esta tabla, la raiz cúbica entera de 30 es 3; la de 500 es 7; la de 628 es 8, la de 12 es 2; etc.

284. *Raiz cúbica de los enteros que pasan de* 1000.—*Regla.*—Para extraer la raiz cúbica de un entero que pase de 1000, divídase en porciones de 3 en 3 cifras comenzando por la derecha, i no importa que la primera porcion de la izquierda tenga tres cifras cabales.

Extráigase la raiz cúbica de la primera porcion de la izquierda i se tendrá la primera cifra de la raiz.

Réstese el cubo de esta cifra de la primera porcion, i á la derecha del resíduo colóquese la porcion siguien-

te separando las dos primeras cifras de la derecha.

Divídase el número que queda á la izquierda por el triple del cuadrado de la raiz hallada, i como el cociente que resulte puede ser, la verdadera segunda cifra de la raiz ó mayor que ella, se comprobará del siguiente modo: á la derecha del triple de la raiz hallada colóquese dicho cociente: el número que así resulte multiplíquese por el mismo cociente: el producto escríbase debajo del divisor corriendo dos lugares hacia la derecha i súmese con él: multiplíquese la suma por el mismo cociente i el producto réstese del resíduo anterior: si la sustraccion puede verificarse, dicho cociente es la 2.ª cifra de la raiz, i sinó, rebájese á ese cociente una ó más unidades hasta que dicha sustraccion pueda practicarse.

Debajo de la suma efectuada anteriormente, colóquese el cuadrado de la última cifra de la raiz i súmese este cuadrado con las dos cantidades escritas encima de él. Al lado del resíduo que dejó la 2.ª cifra, colóquese la porcion siguiente del número propuesto: sepárense las dos cifras de la derecha, i divídase lo que queda á la izquierda por la suma que acaba de indicarse: el cociente se comprobará lo mismo que ántes i se continuará la operacion de un modo análogo hasta que se haya bajado la última porcion del número i encontrado el resíduo i la cifra de unidades de la raiz.

Ejemplo.—Extraer la raiz cúbica de 564021364.

Calculo.

$\sqrt[3]{564.021.364..}$	826 Raiz	
512		
520.21.....	192	.... 242×2
	484	.... ×2
	19684	
	4	
126533.64..	20172	....2466×6
	14796	
Resíduo 461388...	2031996	.....×6

Explicacion de la operacion.—Dividido el número

en porciones de tres en tres cifras de derecha á izquierda, se extrajo la raiz cúbica entera de la primera porcion de la izquierda 564. Dicha raiz que es 8 es la primera cifra de la raiz de todo el número propuesto.

El cubo de 8 que es 512 restóse de la primera porcion de la izquierda: á la derecha del resto 52 se colocó la porcion siguiente 021, separando en el número 52021 las dos cifras de la dereeha; lo que quedó á la izquierda es decir 520 dividióse por 192 triple del cuadrado de 8 que es la raiz hallada.

El cociente de esta division que es 2 ensayóse para raiz, escribiéndolo aparte á la derecha del triple de la raiz hallada: el número 242 que así resulta, multiplicóse por el mismo cociente, i el producto 484 fué sumado con el divisor anterior corriendo dos lugares hacia la derecha. La suma 19684 multiplicóse por el mismo cociente i el producto restóse mentalmente del dividendo modificado 52021: como esta resta pudo verificarse estuvo bien 2 para segunda cifra de la raiz.

Para encontrar la tercera, se colocó á la derecha del resto anterior 12653, la porcion siguiente del número propuesto que fué 364, i en el número 12653364 que así resulta, separóse las dos cifras de la derecha. Luego se escribió debajo de la suma anterior, el cuadrado de la segunda cifra de la raiz el cual es 4, i se sumó éste con las dos cantidades escritas encima de él. La suma 20172 sirvió de divisor al número 126533 que quedó anteriormente despues de haber separado en 12653364 las dos cifras de la derecha.

El cociente de esta division que fué 6, ensayóse para la raiz, escribiéndolo aparte á la derecha de 246 que es el triple de la raiz hallada: el número 2466 que así resulta multiplicóse por el mismo cociente i el producto sumóse con el divisor anterior 20172 corriendo dos lugares hacia la derecha. La suma 2031996 fué multiplicada por el mismo cociente 6, i el producto restado mentalmente del dividendo anterior mas las dos cifras separadas ó sea del dividendo modificado 12653364: como esta resta pudo verificarse, estuvo bien 6 para tercera cifra de la raiz. I no habiendo más porciones que bajar del número propuesto, tenemos que su raiz cúbica es 826, quedando de resíduo 461388.

ADVERTENCIA.—Una raiz cúbica tiene tantas cifras cuantas sean las porciociones en que se descomponga el número.

Raiz cúbica de los decimales.

285. *Regla*,—Para extraer la raiz cúbica de un decimal, procúrese que el número de sus cifras decimales sea divisible por 3, lo que se consigue agregando uno ó mas ceros á la derecha. Extráigase en seguida la raiz como si el númere fuera entero, separando en ella de derecha á izquierda, tantas cifras para decimales como porciones decimales de tres cifras tenga el número propuesto modificado.

EJEMPLO.—Extraer la raiz cúbica de 25'1435214.

CALCULO.

$\sqrt[3]{25'1435214}=\sqrt[3]{25'143,521.400}$		2'929 Raiz	
	8		
	171,43.....	12	.....69×9
		621	
		1821	.....×9
		81	
	07545.21....	2523	....872×2
		1744	
		254044	.....×2
		4	
	2464334.00..	255792	...8769×9
		78921	
Resíduo....	115103 11..	25658121	.....×9

Raiz cúbica de los quebrados comunes.

286. *Regla.*—Para extraer la raiz cúbica de un quebrado comun, conviértase en decimal, i procédase despues extrayendo la raiz cúbica de la cantidad decimal que resulte.

Ejemplo.—Extraer la raiz cúbica del quebrado $\frac{31}{45}$.

Calculo.

$\sqrt[3]{\frac{31}{45}} = \sqrt[3]{0'688888889} = 0'883.$

287. *Si se quiere extraer* la raiz cúbica de un número mixto, redúzcase á quebrado ordinarlo i quedará reducida la operacion al caso anterior.

Si se quiere extraer la raiz cúbica de un número complejo redúzcase á incomplejo de la última especie, i en lo demás procédase como para extraer la raiz cúbica de un número entero.

Aproximacion de la raiz cúbica.

288. *Regla.*—Para aproximar la raiz cúbica de un número, continúese la operacion colocando á la derecha del último resíduo i de los demás que resulten, tres ceros por cada cifra decimal que se quiere de aproximacion.

Ejemplos: 1.°—Extraer la raiz cúbica de 11 aproximada hasta centésimas.

Calculo.

$\sqrt[3]{11}$	2'22 Raiz	
8		....62×2
30.00	12	
	124	..... X2
	1324	
	4	
3520.00	1452	...662X2
	1324	
Resíduo 59052	146524	..... X2

2.° Extraer la raiz cúbica de 0'154829, aproximándola con dos cifras decimales ó sea hasta diezmilésimas.

CALCULO.

$\sqrt[3]{0'154.829}$	0'5369 Raiz	
125		
298.29.....	75	.....153×3
	459	
	7959	....×3
	9	
59520.00..	8427	..... 1596×6
	9576	
	852276	....×6
	36	
8383440.00	861888	.....16089×9
	144801	
Resíduo 613415.91	86333601	....×9

289. *Para extraer la raiz cúbica* de un número en menos de una parte alícuota cualquiera de la unidad, multiplíquese dicho número por el cubo del denominador de la parte alícuota: extráigase la raiz cúbica del producto i divídase esta raiz por el mismo denominador de la parte alícuota.

EJEMPLO.—Extraer la raiz cúbica de 15 en menos de $\frac{1}{5}$.

CALCULO.

$\sqrt[3]{15}$ en menos de $\frac{1}{5} = \sqrt[3]{15 \times 5^3} : 5 = \sqrt[3]{1875} : 5 = \frac{12}{5} = 2'4$.

290. *Prueba de la raiz cúbica.*—Para probar la raiz cúbica, súmese el cubo del número que forman las cifras encontradas con el resíduo de la misma raiz, i la suma, si la operacion está bien hecha, debe dar la cantidad subradical.

EJEMPLO.—Siendo 20 la raiz cúbica entera de 9131 i 1131 el resíduo, tenemos que $20^3 + 1131 = 9131$ ó sea el número propuesto

291. *Problema.*—Conocida la diferencia entre los cubos de dos números consecutivos encontrar estos números.

Resolucion.—Réstese de la diferencia dada 1; el re-

síduo divídase por 3 i la raiz cuadrada del cociente es el número menor: el mayor será este mismo número menor mas 1.

Ejemplo.—Supongamos que hai dos pilas en forma cúbica: que la una contiene 91 metros cúbicos de agua más que la otra i que se desea saber la profundidad de cada cual.

Resolucion.—Restando de 91 una unidad queda 90: sacando la tercera parte 90 queda 30; i la raiz cuadrada entera de 30 es 5, luego la pila mas pequeña tiene 5 metros de profundidad, i la mas grande 6 metros.

En efecto $6^3-5^3=216\ m^3-125\ m^3=91\ m^3$, diferencia conocida.

Problemas de raiz cúbica.

292.—1.° Un artillero tiene tres balas de diferente tamaño· la primera de 5 centímetros de circunferencia, la segunda de 8 i la tercera de 10.

Queriendo hacer una sola bala de las tres ¿cuál será la lonjitud de la circunferencia de dicha bala?

2.° ¿Cuál es el número cuya tercera, cuarta i quinta parte multiplicadas entre sí, dan de producto 158?

3.° ¿Cuánto habrá que pagar por 30 pares de zapatos sabiendo que el precio de cada par es tal, que los $\frac{3}{5}$ de sus $\frac{4}{7}$ de sus $\frac{2}{3}$ dá un producto de 1530 pesos?

4.° Una pila de forma cúbica contiene 16890 decálitros ¿cuál será su profundidad?

5.° Un comerciante compró por $164'64 una cantidad de galletas contenidas en varias cajas: cada caja contenía 3 veces tantas galletas como cajas eran, i cada galleta costaba 2 veces tantos centavos como cajas había ¿cuántas cajas i galletas se compraron?

6.° Averiguar la distancia de Marte al Sol, sabiendo que los cuadrados de los tiempos que emplean los astros en sus revoluciones son proporcionales á los cubos de sus distancias: que Marte verifica su revolucion en 686 dias, 22 horas, 14 minutos, 27 segundos i que la Tierra la verifica en 365 dias, 5 horas, 48 minutos, 45 segundos, distando del Sol 158 millones de kilómetros proximamente.

7.° ¿Cuál es el número del que tomando la qninta

parte de su cubo da por resultado 1689?

8.° Hallar un número cuyos $\frac{4}{9}$ multiplicados por la mitad de su cuadrado dan de producto el año de la independencia de Centro-América.

Extraccion de las raices de grado superior á la cuadrada i cúbica.

293. *Las raices* cuyos indices se compongan solo de factores *dos* ó de factores *tres* ó de ambos, pueden extraerse, extrayendo sucesivamente del número las raices que expresen los factores primos del índice.

Así $\sqrt[4]{N}$ será igual á la raiz cuadrada de la raiz cuadradada de N, es decir: $\sqrt[4]{N} = \sqrt{\sqrt{N}}$.

La $\sqrt[6]{N}$ será igual á la raiz cuadrada de la raiz cúbica de N, ó á la raiz cúbica de la raiz cuadrada de N, es decir: $\sqrt[6]{N} = \sqrt{\sqrt[3]{N}} = \sqrt[3]{\sqrt{N}}$.

Tanto estas raices como las otras cuyos índices no sean múltiplos solo de 2 ó 3 ó de ambos, pueden extraerse por medio del cálculo ordinario; pero en vista de lo dificultoso que es encontrarlas por este método, se extraen jeneralmente por medio de los logaritmos, así como tambien se encuentran las potencias de grados un poco crecidos.

DE LAS RAZONES Y PROPORCIONES.

294. *Razon* es el cociente de dividir un número por otro.

Términos de una razon.—La razon consta de dos términos que se llaman *antecedente* i *consecuente*. Antecedente es el número que sirve de dividendo i consecuente el que sirve de divisor.

Escritura de una razon.—Para escribir una razon colóquese el antecedente i despues el consecuente separados por el signo de dividir (:) ó mejor por la raya de quebrado.

Así la razon de 15 á 4 se indicará : $\frac{15}{4}$ ó 15 : 4.

Lectura de una razon.—Una razon se lee como que-

brado, como division indicada, ó leyendo primero el antecedente i despues el consecuente interponiendo entrambos las palabras *es á.*

Así la razon anterior se leerá: 15 cuartos, 15 dividido por 4 ó 15 *es á* 4, Leida una razon como quebrado es mucho mejor.

De lo dicho resulta: que *razon*, *division indicada* i *quebrado* significan lo mismo. Por consiguiente, todas las propiedades de un cociente ó de un quebrado son las que corresponden á la razon.

295. *Proporcion* es la igualdad de dos razones.

Así $\frac{3}{5}=\frac{6}{10}$ es una proporcion, que tambien se escribe de estos otros modos: 3 : 5=6 : 10, ó 3 : 5::6 : 10.

Los cuatro puntos se leen *como.*

El primero i cuarto término de una proporcion se llaman *extremos*, i el segundo i tercero se llaman *medios.*

Cuando los medios son desiguales la proporcion se llama *discreta* i cuando son iguales se llama contínua.

296. *Formar una proporcion.*—Para formar una proporcion basta poner un quebrado que sea la primera razon i en seguida, para formar la segunda multiplíquense ó divídanse los dos términos de dicho quebrado por un mismo número.

Así por ejemplo, si tenemos el quebrado $\frac{6}{18}$ para la primera razon, la segunda será $\frac{3}{9}$ bervi-gracia, i la proporcion, $\frac{6}{18}=\frac{3}{9}$.

Si es una proporcion contínua la que quiere formarse, escríbase un número cualquiera, multiplíquese por otro i el producto multiplíquese por este otro. El número dado i el segundo producto formarán los extremos i el primer producto será el medio contínuo proporcional.

Así por ejemplo, si tenemos el número 4 i lo multiplicamos por 3 nos da 12 i si este producto lo multiplicamos tambien por 3 nos dá 36: luego la proporcion contínua será $\frac{4}{12}=\frac{12}{36}$.

Propiedades de las proporciones.

297. Las principales propiedades de las proporciones son las siguientes:

1.ª *El producto de los extremos* es igual al producto de los medios.

En efecto, siendo la proporcion $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$, si reducimos ambos quebrados á un comun denominador tendremos $\frac{3.8}{4.8}=\frac{6.4}{4.8}$, luego 3.8 producto de extremos = 6.4 producto de medios.

Cuando la proporcion es contínua, el producto de extremos es igual al cuadrado del término medio.

En efecto, siendo la proporcion $\frac{3}{6}=\frac{6}{12}$, se verifica, por lo dicho antes que $3.12=6.6$, ó $3.12=6^2$.

2.ª *Con dos productos iguales* se puede formar proporcion, poniendo por extremos los factores de un producto, i por medios los factores del otro.

Así por ejemplo, siendo $5\times6=3\times10$, se puede sacar la proporcion $\frac{5}{3}=\frac{10}{6}$.

3.ª *Un extremo* se encuentra multiplicando los medios i dividiendo el producto por el otro extremo.

Si por ejemplo tenemos $\frac{6}{7}=\frac{12}{x}$, X será igual á $(7\times12):6=14$.

4.ª *Un medio* se encuentra multiplicando los extremos i dividiendo el producto por el otro medio.

Si por ejemplo tenemos $\frac{2}{5}=\frac{m}{15}$, m será igual á $(2\times15):5=6$.

Cuando la proporcion es contínua, el término medio es igual á la raiz cuadrada del producto de los extremos.

Si por ejemplo tenemos la proporcion contínua $\frac{5}{m}=\frac{m}{2}$ es claro que siendo $5.20=10^2$, se verifica que $10=\sqrt{5.20}$

Transformacion de las proporciones.

298. Las principales transformaciones de las proporciones son las siguientes:

1.ª *Una proporcion* no varía, aunque se invierta ó altere el órden de sus términos con tal que el producto de los extremos sea igual al producto de los medios.

Segun esto, puede ponerse la segunda razon en vez de la primera; los medios en vez de extremos i viceversa; mudar el lugar de los medios i el lugar de los extremos.

Así por ejemplo, si tenemos la proporcion $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$, se puede transformar en las siguientes:

$$\frac{6}{8}=\frac{3}{4};$$

$$\frac{3}{6}=\frac{4}{8};$$

$$\frac{8}{4}=\frac{6}{3};$$

$$\frac{4}{8}=\frac{3}{6};$$

$$\frac{6}{3}=\frac{8}{4};$$

$$\frac{4}{3}=\frac{8}{6};$$ etc., etc.

2.ª *En toda proporcion* se verifica: que la suma ó diferencia de los antecedentes es á la suma ó diferencia de les consecuentes, como un antecedente es á su consecuente.

Así por ejemplo, siendo la proporcion $\frac{4}{9}=\frac{8}{18}$, se verifica:

$$\frac{4+8}{9+10}=\frac{4}{9}, \text{ i } \frac{4-8}{9-18}=\frac{4}{9}$$

3.ª *En toda proporcion* se verifica: que la suma ó diferencia del antecedente i consecuente de la primera razon es al antecedente ó consecuente de la misma, como la suma ó diferencia del antecedente i consecuente de la segunda razon es el antecedente ó consecuente de la misma.

Así por ejemplo, siendo la proporcion $\frac{3}{5}=\frac{9}{15}$, se verifica:

$$\frac{3+5}{3}=\frac{9+15}{9}, \text{ ó } \frac{3+5}{5}=\frac{9+15}{15} \text{ i}$$

$$\frac{3-5}{3}=\frac{9-15}{9}, \text{ ó } \frac{3-5}{5}=\frac{9-15}{15}$$

4.ª *En toda proporcion* se verifica: que la suma de antecedente i consecuente de la primera razon es á su diferencia, coma la suma de antecedente i consecuente de la segunda razon es á su diferencia.

Así por ejemplo, siendo la proporcion $\frac{2}{3}=\frac{6}{9}$, se verifica:

$$\frac{2+3}{2-3}=\frac{6+9}{6-9}$$

5.ª *En toda proporcion* pueden hacerse las operaciones siguientes sin que deje de haber proporcion:

1.ª Multiplicar ó dividir los cuatro términos por un mismo número.

2.ª Multiplicar ó dividir los términos de una sola de las razones por un mismo número.

3.ª Multiplicar ó dividir los antecedentes ó los consecuentes por un mismo número.

4.ª Elevar á una misma potencia ó extraer la raiz del mismo grado de todos los términos de la proporcion.

Así, suponiendo que la proporcion sea $\frac{16}{25}=\frac{64}{100}$ tendremos:

$$1.^{\circ}\ \frac{16\times3}{25\times3}=\frac{64\times3}{100\times3},\ \text{i}\ \frac{16:3}{25:3}=\frac{64:3}{100:3}$$

$$2.^{\circ}\ \frac{16\times7}{25\times7}=\frac{64}{100},\ \text{i}\ \frac{16:7}{25:7}=\frac{64}{100}$$

$$3.^{\circ}\ \frac{16\times4}{25}=\frac{64\times4}{100},\ \text{i}\ \frac{16:4}{25}=\frac{64:4}{100}\ \text{ó}\ \frac{16}{24\times2}=\frac{64}{100\times2},\ \text{i}$$

$$\frac{16}{25:2}=\frac{64}{100:2}$$

$$4.^{\circ}\ \frac{16^3}{25^3}=\frac{64^3}{100^3},\ \text{i}\ \frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{25}}=\frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{100}}$$

Comparacion de las proporciones

299. 1.ª *Si dos proporciones* tienen una razon comun, con las razones no comunes se puede formar proporcion.

Así por ejemplo, siendo las proporciones $\frac{3}{5}=\frac{6}{10}$ i $\frac{3}{5}=\frac{12}{20}$, es evidente que $\frac{6}{10}=\frac{12}{20}$.

2.ª *Si dos proporciones*, tienen los mismos extremos ó medios, con los medios ó extremos restantes se puede formar proporcion, poniendo por extremos los extremos de la una i por medios los extremos de la otra.

Así por ejemplo, siendo $\frac{3}{5}=\frac{12}{20}$ i $\frac{10}{5}=\frac{12}{6}$, se verifica:

$$\frac{3}{10}=\frac{6}{20}$$

3.ª *Si dos proporciones* tienen iguales antecedentes ó consecuentes, con los consecuentes ó antecedentes restantes se puede formar proporcion.

Así por ejemplo, siendo las proporciones $\frac{5}{6}=\frac{10}{18}$ i $\frac{5}{4}=\frac{10}{8}$ que tienen iguales antecedentes se verificará:

$$\frac{6}{12}=\frac{4}{8}$$

Siendo las proporciones $\frac{6}{10}=\frac{12}{20}$ i $\frac{4}{10}=\frac{8}{20}$ que tienen iguales consecuentes se verificará:

$$\frac{6}{12}=\frac{4}{8}$$

4.ª *Si varias proporciones* se multiplican ordenadamente, los productos que resulten forman proporcion.

Así por ejemplo, si tenemos la proporcion $\frac{2}{3}=\frac{6}{9}$ i $\frac{4}{7}=\frac{8}{14}$ i las multiplicamos término por término resultará la proporcion.

$$\frac{2\times4}{3\times7}=\frac{6\times8}{9\times14} \text{ ú } \frac{8}{21}=\frac{48}{126}$$

Série de razones iguales es la igualdad de tres ó más razones.

5.ª *En toda série* de razones iguales se verifica que la suma ó diferencia de los antecedentes es á la suma ó diferencia de los consecuentes, como un antecedente á su respectivo consecuente.

Así por ejemplo, si tenemos la série de razones $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{8}{12}=\frac{6}{9}=\frac{20}{30}$ se verifica:

$$\frac{2+4+8+6+20}{3+6+12+9+30}=\frac{2}{3}, \text{ i } \frac{2-4-8-6-20}{3-6-12-9-30}=\frac{2}{3}$$

300. *Conocida la suma ó diferencia* de un medio i un extremo que se suponen incógnitos en una proporcion, hallar sus valores.

Resolucion.—Sea la proporcion $\frac{10}{Z}=\frac{6}{X}$, i supongamos que $X+Z=30$ i $Z-X=5$.

En virtud de propiedades anteriormente vistas se virifica.

$\frac{10+6}{Z+X}=\frac{10}{Z}$ i $\frac{10+6}{Z+X}=\frac{6}{x}$, i del mismo modo

$$\frac{10-6}{Z-X}=\frac{10}{Z} \text{ i } \frac{10-6}{Z-X}=\frac{6}{x}$$

Sustituyendo en cada proporcion el valor de $Z+X$ i de $Z-X$ tendremos:

$\frac{16}{30}=\frac{10}{z}$, $\frac{16}{30}=\frac{6}{x}$; i $\frac{4}{5}=\frac{10}{z}$, $\frac{4}{5}=\frac{6}{x}$, de las cuales podemos fácilmente hallar los valores de Z i de X.

DE LA REGLA DE TRES

301. *Definicion.*—Regla de tres ó regla de oro, es la que enseña á conocer un número por las relaciones de proporcion que tiene con otros números dados.

Objeto de la regla de tres.—La regla de tres tiene pues por objeto, resolver los problemas que dependen de una ó mas proporciones.

Division.—La regla de tres se divide en *simple* i *compuesta.*

Es simple cuando solo se dan tres cantidades conocidas i una incógnita, i es *compuesta* cuando se dan mas de tres cantidades conocidas i una incógnita.

En una regla de tres simple se llama *primer dato*, la primera cantidad i *primer resultado* el término que es de la especie de la incógnita. De igual manera: *segundo dato* es la cantidad de la misma especie del primer dato, i *segundo resultado* es la incógnita ó cantidad que se busca.

302. *Division de la regla de tres simple.*—La regla de tres simple se divide en *directa* é *inversa.* Es directa, cuando aumentando ó disminuyendo el segundo dato aumenta ó disminuye el segundo resultado, es decir: cuando de *más* dá *más* ó de *menos* dá *menos*; i en inversa cuando aumentando ó disminuyendo el segundo dato disminuye ó aumenta el segundo resultado es decir: cuando de *más* dá *menos* ó de *menos* dá *mas.*

Ejemplos.—1.° La cuestion siguiente: si con $40 se pueden comprar 8 qq. de café, con $75 ¿cuántos se comprarán? es un problema de regla de tres directa, porque con más pesos es evidente que se compran mas

quintales i con menos pesos menos quintales.

2.° La cuestion siguiente: si 10 hombres hacen una obra en 8 dias, 15 hombres en ¿cuantos dias la harán? es un problema de regla de tres inversa porque *mas* hombres tardan *menos* tiempo en hacer la obra, i *menos* hombres *mas* tiempo.

Supuesto i *pregunta.*—Se llama *supuesto* en un problema de regla de tres, todas las cantidades que escritas en fila horizontal no contienen la incógnita, i *pregunta* las cantidades que escritas de igual manera sí contienen la incógnita.

Ejemplo.—En la cuestion siguiente: si en 6 dias, trabajando 8 horas diarias se caminan 120 leguas, en 15 dias, trabajando 3 horas diarias ¿cuántas leguas se caminarán? tendremos que el supuesto de la cuestion será: 6 dias, 8 horas diarias, i 120 leguas i la pregunda: 15 dias, 3 horas diarias, i X leguas.

Procedimiento jeneral para resolver la regla de tres simple i compuesta.

303. Colóquense los términos del supuesto de manera que se correspondan con sus homojéneos de la pregunta.

Escríbase la raya de quebrado i encima siempre, el *término principal* de la cuestion que es el de la especie de la incógnita.

En seguida relaciónense cada dos términos homojéneos con el principal de la cuestion, como si se enunciasen reglas de tres simples; i cuando el resultado dé *más*, se pondrá el *mayor* de los dos términos homojéneos relacionados, encima de la raya, i el *menor* debajo; i cuando el resultado dé *menos*, se pondrá el *menor* encima i el *mayor* debajo.

Interpóngase despues, entre cada término del numerador i denominador del quebrado que así resulte el signo de multiplicar.

Simplifíquese dicho qnebrado, i su valor será el de la incógnita que se propone en la cuestion.

Ejemplos.

304. 1.° Averiguar cuanto cuestan 35 quintales de

café, suponiendo que 4 cuestan 48 pesos.

Resolucion $\left\{\begin{matrix} 4 \text{ qq.} — \$48 \\ 35 \text{ ,, } — X \end{matrix}\right\} X = \frac{48 \times 35}{4} = \frac{12 \times 35}{1} = \$420.$

Para resolver esta cuestion, colocamos encima de la raya, el término 48 que es el principal de la cuestion. Luego dijimos: si 4 qq. cuestan $48 es claro que 35 qq. costarán *mas*; se colocó entónces el *mayor* número de los quintales encima de la misma raya i el *menor* debajo, resultando el quebrado del márjen, que simplificado dió $420 para valor de los 35 qq.

2.° *Averiguar cuantos* dias necesitan 15 hombres para levantar una pared, suponiendo que 25 la levantan en 30 dias.

Resolucion $\left\{\begin{matrix} 25 \text{ hombres} - 30 \text{ dias} \\ 15 \text{ ,, } - X \text{ ,,} \end{matrix}\right\} X = \frac{30 \times 25}{15} = \frac{2 \times 25}{1} =$ 50 dias.

Para resolver esta cuestion, colocamos encima de la raya 30, que es el término principal de la cuestion. Luego dijimos: si 25 hombres hacen la pared en 30 dias, 15 hombres la harán en *mas* dias. Pusimos pues, el mayor número de hombres encima de la misma raya i el menor debajo, resultando el quebrado del márjen, que simplificado dió 50 ó sea el número de dias en que 15 hombres hacen la pared.

3.° *Averiguar cuantas* piezas de papel se necesitan para tapizar una pared que tiene de largo 15 varas; de ancho 10 i de grueso 2, suponiendo que 50 piezas alcanzan para otra pared de 20 varas de largo, 6 de ancho i 3 de grueso.

Resolucion $\left\{\begin{matrix} 20 \text{ v}^{\text{s}}\text{. l.} - 6 \text{ v}^{\text{s}}\text{. a.} - 3 \text{ v}^{\text{s}}\text{. gr.} - 50 \text{ piezas} \\ 15 \text{ ,, ,, } - 10 \text{ ,, ,, } - 2 \text{ ,, ,, } - X \text{ ,,} \end{matrix}\right\} X =$

$\frac{50 \times 15 \times 10 \times 2}{10 \times 6 \times 3} = \frac{5 \times 5 \times 5}{3} = 41 \frac{2}{3}$ piezas.

Para resolver esta cuestion escribimos encima de la raya de quebrado el término 50 que es el principal. Luego relacionamos sucesivamente el largo, ancho i grueso de la pared con 50 piezas diciendo: si teniendo 20 varas de largo se necesitan 50 piezas, teniendo 15 se necesitarán *menos* piezas; ponemos pues, 15 menor largo encima de la raya i 20 debajo.

Si teniendo 6 varas de ancho se necesitan 50 piezas teniendo 10 se necesitarán *mas* piezas; ponemos pues 10, *mayor ancho*, encima de la raya i 6 debajo.

Finalmente, si teniendo 3 varas de grueso se necesitan 50 piezas, teniendo 2 se necesitarán *menos piezas*; ponemos 2, *menos grueso* encima de la raya i 3 debajo.

Colocando en seguida entre cada término del numerador i denominador del quebrado el signo de multiplicar, i simplificando despues dicho quebrado se encontró $41\frac{2}{3}$ que es el número de piezas que resuelve la cuestion.

ADVERTENCIAS.—1.ª Cuando en el supuesto ó en la pregunta haya números complejos redúzcanse á incomplejos á efecto de que cada dos términos homojéneos expresen unidades de un mismo órden.

2.ª *Cuando* en algun término del quebrado que resulte haya decimales, colóquense á la derecha de cualquier factor del otro término tantos ceros como cifras decimales haya.

3.ª *Cuando* en el supuesto ó en la pregunta haya quebrados comunes, redúzcanse de antemano á decimales, i procédase en lo demás como si fueran enteros.

A continuacion ponemos por via de ejercicios, i con los quebrados que dan las soluciones respectivas los siguientes:

Problemas de regla de tres.

305. 1.º Si un viajero camina 6 leguas en 5 horas ¿cuántas caminará en 12 horas?

92-2°

$$\left.\begin{array}{l} 5 \text{ horas—6 leguas} \\ 12 \quad ,, \quad \text{—X} \quad ,, \end{array}\right\} X = \frac{6 \times 12}{5}$$

2.º Si una plaza sitiada tiene víveres para 30 dias, ¿á cuanto deberá reducirse la racion de cada individuo, suponiendo que el sitio dure 45 dias?

$$\left.\begin{array}{l} 30 \text{ dias—1 racion} \\ 45 \quad ,, \quad \text{—X} \end{array}\right\} \& = \frac{1 \times 30}{45}$$

3.º Si una fuente arroja 75 litros de agua en 12 minutos i 10 segundos ¿cuántos litros arrojará en 36 minutos?

75 l.—12 m^s., 10 seg^s. } $X = \frac{75 \times 2160}{730}$
X ,,— 36 ,,

4.° Si 10 hombres, en 30 dias, trabajando 4 horas diarias, abren una zanja de 500 varas de largo, 5 de ancho i 15 de profundidad, ¿En cuánto tiempo se podria abrir otra zanja de 180 varas de largo, 8 de ancho i 9 de profundidad con 5 hombres que trabajasen 12 horas diarias?

hom.	dias	hor. d^s.	v^s. l.	v^s. a.	v^s. prof.
10	— 30 —	4	— 500 —	5	— 15
5	— X —	12	— 180 —	8	— 9

$$X = \frac{30 \times 10 \times 4 \times 180 \times 8 \times 9}{5 \times 12 \times 500 \times 5 \times 15}$$

5.° Treinta personas, por 5 dias de alojamiento en un hotel han pagado $55'37 ¿cuánto pagarían 24 personas con las mismas condiciones en 9 dias?

30 personas—5 dias—$55'37 } $X = \frac{55'39 \times 24 \times 9}{30 \times 5}$
24 ,, —9 ,, — X

6.° Si un correo con la velocidad de 3 leguas por hora recorre 2160 leguas en 30 dias ¿Con qué velocidad podría recorrer 550 en 25 dias?

3 leg^s. por hora—2160 leg^s.—30 dias } $X = \frac{3 \times 550 \times 30}{2160 \times 25}$
X ,, ,, — 550 ,, —25 ,,

7.° Averiguar qué interés produce un capital de 450 pesos en 5 meses al 4 por ciento anual.

$100—12 meses—$4 } $X = \frac{4 \times 450 \times 5}{100 \times 12}$
450— 5 ,, —X

8.° Averiguar qué capital en 2 años, 4 meses produce $2500 de interés al $3'50 por ciento mensual.

$ 100— 1 mes—$3'50 } $X = \frac{100 \times 1 \times 2500}{28 \times 3'50}$
,, X —28 ,, —$2500

Division de un número en partes proporcionales.

306. *Definicion.*—Dividir un número en partes proporcionales es descomponerlo en partes tales: que sumadas dén el mismo número i además formen proporcion con otros números dados.

Regla.—Para dividir un número en partes proporcionales á otros números dados, divídase dicho número por la suma de estos números dados i el cociente multiplíquese por cada número dado. Los productos serán las partes proporcionales que se buscan.

Ejemplo.—Dividir el número 340 en partes proporcionales á 6,4 i 10.

Calculo.

$$240 : [6+4+10]=340 : 20= 17$$
$$1.^a \text{ parte}=17\times 6=102$$
$$2.^a \text{ id. } =17\times 4= 68$$
$$3.^a \text{ id. } =17\times 10=170$$

Suma 340

Además, $\frac{6}{102}=\frac{4}{68}=\frac{10}{170}$ porque $6\times 68=4\times 102$ i $4\times 170=68\times 10$.

Problemas.

307. 1.° Un padre al morir dejó la cantidad de 18300 pesos i dispuso que se repartiera entre sus 4 hijos en proporcion á sus edades. El hijo mayor tenia 25 años, el siguiente 20, el otro 14 i el menor 5 años ¿cuánto toca á cada uno?

2.° Tres jugadores ganaron en una rifa $3500 i habiendo contribuido el primero con $150, el segundo con $30'25 i el tercero con $80, ¿Cuánto ganó cada uno?

3.° Se distribuyó la cantidad de 450 en tres cajas, conteniendo la primera doble número de sombreros que la segunda i esta triple número de sombreros que la tercera, ¿cuántos sombreros contenía cada caja?

4.° Los cuatro caños de una pila han estado abiertos el 1.° 3 horas, el 2.° 5, el 3.° 6 i el 4.° 1 horas: habiendo arrojado entre los cuatro 10450 litros de agua, ¿cuántos litros arrojó cada caño?

5.° La directora de un colejio ofreció á sus alumnas de Aritmética una recompensa de 300 medallas en proporcion al número de óptimas que cada cual sacara en la clase durante el año. La primera obtuvo 25 óptimas, la segunda 40, la tercera 5, la cuarta 10 i 7

cada una de las diez alumnas restantes, ¿cuántas medallas sacó cada una?

6.° Una persona que se declaró en quiebra dejó un activo de solo $5800, i existiendo tres acreedores, el uno de $3500, el otro de $4000 i el tercero de $800, ¿cuánto alcanza cada uno en la liquidacion?

Regla de sociedad ó de compañía.

308. *Definicion.*—Regla de sociedad ó de compañía es la que tiene por objeto determinar la ganancia ó pérdida que corresponde á varios individuos que han contribuido con su capital ó con su industria para emprender una negociacion.

Los socios que contribuyen con su capital se llaman *socios capitalistas* i los que contribuyen con solo su trabajo se llaman *socios industriales.*

El capital con que cada socio contribuye se denomina *accion* i lo que á cada cual corresponde de utilidades ó pérdidas *dividendo.*

La regla de compañía se reduce á la division de un número en partes proporcionales; por consiguiente:

309. 1.° *Cuando sea uno mismo el tiempo* i diferentes los capitales *de los socios*, divídase la ganancia ó pérdida total por la suma de las acciones, i el cociente [bastante aproximado por decimales] multiplíquese por la accion de cada socio.

Ejemplo.—A puso $350, B $1800 i C $700. Habiendo ganado $3600 averiguar el dividendo de cada sócio.

Calculo.

Gan. $3.600			Dividendos.
A $ 350	3600 : 2850 = 1'2632		A 1'2632 × 350 = $ 442'10
B „ 1800			B 1'2632 × 1800 = „ 2273'70
C „ 700			C 1'2632 × 700 = „ 884'20
$ 2850			Suma $ 3.600

310. 2.° *Cuando sea una misma la accion de cada sócio i diferentes los tiempos*, divídase la ganancia ó pérdida total por la suma de los tiempos i el cociente multiplíquese por cada uno de los tiempos.

Ejemplo.—A, B i C contribuyeron con la misma

cantidad, el primero por 15 meses, el segundo por 10 i el tercero por 12. Habiéndose ganado $6000 ¿cuánto toca á cada uno?

CALCULO.

Gan. $ 6000
A 15 meses
B 10 ,,
C 12 ,,
37 meses

6000 : 37=162'1621

Dividendos:
A 162'1621 × 15=$2432'43
B 162'1621 × 10=,,1621'62
C 162'1621 × 12=,,1945'95
Suma $ 6000

311. 3.° *Cuando sean diferentes las acciones i los tiempos*, divídase la ganancia ó pérdida total por la suma de los productos de las acciones multiplicadas por sus tiempos i el cociente multiplíquese por cada uno de estos productos.

EJEMPLO.—A puso $200 por 3 años, B $500 por 5 años i C $400 por 2 años, habiéndose obtenido de ganancia $20.000 ¿cuánto corresponderá á cada sócio?

CALCULO.

Gan. $20.000
A $200--3 años
B ,,500--5 ,,
C ,,400--2 ,,

200×3= 600
500×5=2500
400×2= 800
Suma=3900

20.000 : 3900=5'128205

dividendos
A 5'128205× 600=$ 3076'92
B 5'128205×2500=,, 4102'57
C 5'128205× 800=,, 12820'61
Suma $20. 000

De lo expuesto resulta: que en el primer caso los dividendos son proporcionales á las acciones; en el segundo, á los tiempos; i en el tercero á los productos de las acciones multiplicadas por sus tiempos respectivos.

312. *Casos en que haya sócios que despues de instalada la sociedad aumentan capital ó sustraen parte del que han puesto, ó bien, que despues de instalada la sociedad se agregan nuevos sócios ó se separa alguno de los que la formaron.*—Cuando alguno de estos casos se presente, hágase bien el cómputo de las

acciones que cada sócio suscriba i del tiempo respectivo, pudiendo considerar el aumento de un capital como un nuevo sócio que ingresa á la compañia.

Sirvan por vía de ejercicio los siguientes problemas.

1.° *A* i *B hicieron una compañia*, por 20 meses contribuyendo A con $500 i B con $400. A los 3 meses de instala la sociedad se admitió al socio C con $1000 i 2 meses despues de este, al sócio D con $200. Esto supuesto, i habiéndose ganado $5400 ¿cuánto corresponde á cada sócio?

Para resolver esta cuestion, basta observar que los sócios A i B pusieron sus acciones por todo el tiempo de la compañia es decir por 20 meses; el sócio C por 17 meses i el sócio D por 15 meses.

I aplicando ahora la regla del párrafo 311 se hallaria facilmente el dividendo de cada sócio.

2.° *Tres individuos A B i C se asociaron* por 2 años: A puso $1000 por todo el tiempo de la asociacion; B puso al principio $400, i á los 4 meses aumentó $500; C puso $100 al principio i á los 9 meses aumentó $250. Habiendo ganado la compañia $8000 ¿cuánto le corresponde á cada sócio?

Para resolver esta cuestion, haremos figurar al sócio B i al sócio C con 2 acciones cada uno i plantear los datos como sigue:

Gan. $8000	A	—$	1000	por	24	meses
	B	—,,	400	,,	24	,,
		—,,	500	,,	20	,,
	C	—,,	100	,,	24	,,
		—,,	350	,,	15	,,

En lo demás procédase como el problema anterior.

3.° *Tres individuos* A B i C ganaron en una empresa $15000: A puso al principio, $5000 i retiró á los 5 meses $1600; B puso $2800 por 12 meses i C $3600 por todo el término de la asociacion que fué de 20 meses; habiendo liquidado las cuentas ¿cuánto ganó cada sócio.

Para resolver este problema, observaremos que el sócio A puso $5000 solo por 5 meses i $3400 [diferencia entre 5000 i 1600] por 15 meses; que el sócio B puso $2800 por 12 meses i el sócio C $3600 por 20 meses. El planteo de la cuestion será pues:

A	$ 5000— 5 meses;	A	$ 25000	Gan. total $15000.
	,, 3400—15 ,,		,, 51000	
B	,, 2800—12 ,,	B	,, 33000	
C	,, 3600—20 ,,	C	,, 72000	

313 *Cuando haya sócios industriales* sáquese primero lo que á ellos corresponda en virtud de las estipulaciones hechas, i el resto de la ganancia total, divídase entre los sócios capitalistas segun las reglas precedentes.

Finalmente, cuando en una cuestion de compañia no se quiere buscar la ganancia ó pérdida de cada sócio sino las acciones ó los tiempos, pueden con facilidad resolverse las operaciones por medio de la division de un número en partes proporcionales.

Problemas de compañia.

314. 1.° A i B se asociaron con C. habiendo contribuido A con $3000, B con $1800 i C con su trabajo. Siendo la ganancia obtenida en la empresa de $6000 i habiéndose convenido en dar al sócio industrial la vijésima parte de las utilidades ¿cuánto corresponde á cada uno?

2.° A, B i C ganaron en una compañia el 1.° $450, el 2.° $300 i el 3.° $1000; habiendo suscrito entre los tres un capital de $12000 ¿con qué accion contribuyó cada sócio?

3.° Cuatro personas A, B, C i D formaron una compañia, el 1.° puso $150 por 3 años; el segundo puso al principio $500 i á los 6 meses despues introdujo $2000 mas; el tercero puso al principio $1600 i á los 2 años retiró $600; el cuarto puso $3500 por todo el término de la sociedad que fué de 3 años i medio. Habiendo fracasado por desgracia la empresa, hubo una pérdida de $8500 ¿á cuánto asciende la de cada sócio?

4.° Tres indivíduos A, B i C formaron una compañia: A puso su capital por un año, B por 10 meses i C por 2 años, 4 meses.

Habiendo suscrito cada sócio una misma accion i obtenídose de utilidades $10508 ¿cuánto ganaría cada sócio?

5.° Dos asociados formaron una empresa. el primero puso $24500 i el segundo $15800. Habiendo recibi-

do el uno $2400 de ganancia más que el otro ¿cuál es la ganancia de cada sócio?

DE LA REGLA DE INTERES.

Interés Simple

315. *Definicion.*—Se llama interés, la ganancia que produce un capital prestado con ciertas condiciones.

316. *Division.*—El interés se divide en *simple* i *compuesto*, legal i convencional.

Interes simple es el producido por solo el capital prestado.

Interés compuesto es el producido por el capital prestado i por los intereses que va devengando este capital.

El interés compuesto entraña pues, lo que se llama *capitalizacion de intereses.*

Interés legal es el que se paga de acuerdo con el tanto por ciento que fijan las leyes de un pais.

Interés convencional es el que se paga de acuerdo con el tanto por ciento que fija la voluntad de los contratantes.

Tanto por ciento ó por millar es lo que se paga jeneralmente cada año ó cada mes por 100 ó por 1000 monedas

El tanto por ciento se indica p. 0/0; i el tanto por millar p.0/00.

Términos que entran en toda cuestion de interes.—En toda cuestion de interés entran 6 cantidades que son:

1.ª *Capital* empleado.
2.ª *Interés* que produce.
3.ª *Tiempo* que tarda impuesto.
4.ª 100 ó 1000 capital fijo que sirve de comparacion.
5.ª Interés de 100 ó de 1000 llamado tanto p.0/0 ó p.0/00.
6.ª Tiempo del tanto p.0/0 ó p.0/00 que jeneralmente es 1.

Todos estos términos se conocen indistintamente con el nombre de *datos.*

Procedimiento jeneral para resolver los problemas de interés simple.

317. *Primer caso*: que el tiempo esté expresado en años.

Regla 1.ª—El interés es igual á la centésima parte del producto de los otros datos.

Ejemplo.—El interés de $5400 en 5 años al 2 p.0/0 anual será:

$$\frac{5.400 \times 5 \times 2}{100} = \$540$$

Regla 2.ª—El capital, el tanto por ciento ó el tiempo son iguales al céntuplo del interés partido por el producto de los otros datos.

Ejemplo.—El capital que en 4 años produjo $1500 de interés al $5'25 p.0/0 anual será:

$$\frac{100 \times 1500}{4 \times 5'25} = \frac{100 \times 150000}{4 \times 5'25} = \$7142'86$$

318. *Segundo caso*: que el tiempo esté expresado en meses.

Regla 1.ª—El interés es igual á los 1200 avos del producto de los otros datos.

Ejemplo.—El interés de $400 en 8 meses al 5 p.0/0 anual será:

$$\frac{400 \times 8 \times 5}{1200} = \$13'33$$

Regla 2.ª—El capital, el tanto por ciento ó el tiempo son iguales á 1200 veces el interés partido el producto por el producto de los otros datos.

Ejemplo.—El tiempo durante el cual $500 producen $120 de interés al 4 p.0/0 anual será:

$$\frac{1200 \times 120}{500 \times 4} = 72 \text{ meses}$$

319. *Tercer caso*: que el tiempo esté expresado en dias.

Regla 1.ª—El interes es igual á 36000 ó 36500 avos del producto de los otros datos [1].

(1) Se emplea 36000 cuando es el año comercial, i 36500 cuando es el año comun.

Ejemplo.—El interèsde $2000 en 200 dias al 6 p.0/0 anual será:

$$\frac{2000 \times 200 \times 6}{36000} = \$66'67$$

Regla 2.ª—El capital, el tanto por ciento ó el tiempo son iguales á 36000 ó 36500 veces el interés partido el producto por el producto de los otros datos.

Ejemplo.—El tanto por ciento á que se impuso un capital de $3000 para que en 145 dias haya producido $150 de interés será:

$$\frac{36000 \times 150}{3000 \times 145} = \$12'51$$

Resolucion de las cuestiones de interés simple, por medio de la regla de tres.

320. *Regla.*—Para resolver cualquiera cuestion de interés simple por medio de la regla de tres, póngase por primer término del supuesto 100 ó 1000 [segun sea el tanto p.0/0 ó p.0/00;] por segundo término el tiempo durante el cual se paga el tanto por ciento ó por millar, i por tercer término el mismo tanto por ciento ó por millar.

Colóquense debajo los términos respectivos de la pregunta, representando por una letra el término incógnito de la cuestion.

Fórmese despues un quebrado cuyo numerador sea el producto indicado en aspa de los términos que no contienen la incógnita i cuyo denominador sea el producto indicado en aspa de los términos que sí la contienen.

El valor de este quebrado despues de simplificarse resolverá el problema.

Ejemplos.—1.° *Hallar el interés* de $350 en 4 meses al 3 p.0/0 cada 20 dias

Resolucion $\left\{ \begin{array}{l|l} \$100—20 \text{ dias} & \$3 \\ \hline 350—120 \text{ dias} & Y \end{array} \right\}$ $Y = \frac{3 \times 120 \times 350}{100 \times 20} = \$63$

2.° *Hallar el capital* que en 10 meses produjo $500 de interés al 2'50 p.0/0 cada tres meses.

Resolucion $\left\{\begin{array}{l|l} \$100\text{–}3 \text{ mses.} & \$2'50 \\ \hline C \text{ –}10 \text{ ,,} & 500 \end{array}\right\} C = \frac{100 \times 3 \times 50000}{10 \times 250} = \$14000$

3.° *Hallar el tiempo durante* el cual $4500 produjeron 600 de interés al 5 p.0/0 mensual.

Resolucion $\left\{\begin{array}{l|l} \$\ 100\text{–}1 \text{ mes} & \$5 \\ \hline 4500\text{–}t \text{ ,,} & 609 \end{array}\right\} T = \frac{100 \times 1 \times 600}{5 \times 450} = 26 \text{ m}^{s}, 20 \text{ d}^{s}.$

4.° *Hallar el tanto* por ciento mensual á que se impuso un capital de $1500 para que en 2 años haya producido $250 de interés.

Resolucion $\left\{\begin{array}{l|l} \$\ 100\text{–}1 \text{ mes} & X \\ \hline 1500\text{–}24 \text{ ,,} & \$250 \end{array}\right\} X = \frac{100 \times 1 \times 250}{1500 \times 24} = \$0'69$

5.° *Hallar el tiempo* del tanto por ciento de un capital de $4000 que en 3 años i al 5 p.0/0 produjo $300.

Resolucion $\left\{\begin{array}{l|l} \$\ 100\text{–} \quad t & 5 \\ \hline 4000\text{–}3 \text{ años} & 300 \end{array}\right\} T = \frac{4000 \times 3 \times 5}{100 \times 300} = 2 \text{ años.}$

Métodos particulares para hallar el interés simple de un capital.

321. 1.° *Método de los divisores fijos.*—Se llama divisor fijo el cociente que resulta de dividir 100, 1200 36000 ó 36500 por el tanto por ciento.

Para hallar el interés por este método, multiplíquese el capital por el tiempo reducido á años á meses ó á dias segun se quiera, i el producto divídase por el divisor fijo que corresponda al tanto por ciento dado. [1]

La práctica de este método se facilita formando ó teniendo á la vista una tabla de divisores fijos como la siguiente:

(1) El producto de un capital multiplicado por su tiempo se llama *mercantilmente número.*

Tanto p. %	Divisores, año de 360 dias	Divisores, año de 365 dias
0'50	72.000	73.000
1	36.000	36.500
1'50	24.000	24.333'333
2	18.000	18.250
2'50	14.400	14 600
3	12.000	12.166'666
3'50	10.285'714	10.428'571
4	9.000	9.125
4'50	8.000	8 111'111
5	7.200	7.300
5'50	6.545'454	6.636'363
6	6.000	6.083'333
7	5.142'857	5.214'285
8	4.500	4.562'500
9	4.000	4.055'555
10	3.600	

Supongamos ahora que se quiere buscar el interés de $61000 en 2 años el 3 p.0/0 [año comercial.]

Reduciendo los 2 años á dias resultan 720 dias: multiplicando este tiempo por el capital prestado se halla de producto 43920000, i dividiendo esta cantidad por 12000 que es el divisor fijo que en la tabla corresponde al 3 p.0/0 se obtiene:

$$\frac{43920000}{12000} = \$3660 \text{ que es el interés deseado.}$$

322. 2.° *Método de los multiplicadores fijos.*—Se llama multiplicador fijo el interés de un peso durante un dia i á un tanto por ciento cualquiera.

Para hallar el interés de un capital por este método, multiplíquese dicho capital por su tiempo reducido á dias, i el producto, multiplicado por su multiplicador fijo será el interés que se busca.

La práctica de este método se facilita formando ó teniendo á la vista una tabla de multiplicadores fijos como la siguiente:

Tantos p.%	Intereses de $1 en 1 dia
1	0'0000278
1'50	0'0000417
2	0'0000556
2'50	0'0000695
3	0'0000834
3'50	0'0000973
4	0'0001112
4'50	0'0001251
5	0'0001390
5'50	0'0001529
6	0'0001668
6'50	0'0001807
7	0'0001946
7'50	0'0002085
8	0'0002224
8'50	0'0002363
9	0'0002502
9'50	0'0002641
10	0'0002780

Supongamos ahora que se quiere buscar el interés de $350 en 5 meses al 7 p.%.

El producto del capital por los 5 meses reducidos á dias es igual á 350X150=52500, i multiplicando este producto por el multiplicador fijo correspondiente á $1 i al 7 p.0/0 resulta:

52500X0'00001946=$10'21 que es el interés que se desea.

323. 3.° *Método llamado de Graillat.*—Este método consiste en hallar el interés en un dia al 4 p.0/0 del capital prestado.

Para conseguirlo, súmense todas las cifras del capital de derecha á izquierda, comenzado primero desde las unidades, luego desde las decenas i así sucesivamente, teniendo cuidado de ir agregando á cada suma las decenas que resulten en la suma anterior inmediata.

Sepárense en el resultado de derecha á izquierda cuatro cifras para decimales, i el número que así se forme será el interés del capital en 1 dia al 4 p.0/0. [1]

Ejemplo.—Supongamos que se quiere saber cual es

(1) El año que en este método se emplea para pagar el tanto p.%, es solo el de 360 dias.

el interés de $5421 en 1 dia i al 4 p.0/0; i para conseguirlo dirémos: 1+2+4+5=12, dejo 2 i llevo 1;
2+4+5+1 que se lleva=12, dejo 2 i llevo 1;
4+5+1 que se lleva=10, dejo 0 i llevo 1;
5+1 que se lleva=6.

El número que resulta es pues 6022, i separando aquí 4 cifras para decimales de derecha á izquierda tendremos $0'6022 que es el interés pedido.

324. *Sabiendo sacar* el interés al 4 p.0/0 en 1 dia es mui fácil sacarlo á cualquier otro tanto por ciento en 1 dia tambien.

Así, para el 2 p.0/0 se saca la mitad del 4 p.0/0.
Para el 1 p.0/0 la cuarta parte del 4 p.0/0.
Para el 3 p.0/0 se suma el 2 con el 1 p.0/0.
Para el 5 p.0/0 se suma el 3 con el 2 p.0/0.
Para el medio p.0/0 se saca la mitad del 1 p.0/0.
Para el sexto p.0/0 la sexta parte del 1 i asi en cualquier otro caso.

Ahora, para calcular el interés simple por este método, basta multiplicar el interés del capital en 1 dia segun queda explicado, por su tiempo reducido á dias.

Supongamos por ejemplo que se quiere hallar el interés del capital anterior $5421 en 5 meses i al 3'50 p.0/0.

Para resolver esta cuestion decimos: siendo $0'6022 el interés al 4 p.0/0, la mitad, ó sea $0'3011 será el intesés al 2 p.0/0.

La mitad de $0'3011 ó sea $0'1505 será al 1 p.0/0, i la mitad de $0'1505 que es $0'0752 será al medio ó 0'50 p.0/0.

Luego el interes al $3'50 p.0/0 es: $0'3011+$0'1505 +0'0752=$0'5268. Multiplicando ahora esta cantidad por 150 dias que tienen los 5 meses tendremos:
0'5268X300=$79'05 que es el interés que se pide.

Advertencias.—1.ª Cuando el capital tenga decimales se deben separar las 4 cifras que indica la regla más el número de cifras decimales que tenga el capital.

2.ª Si quiere hallarse más exactitud en los resultados, pueden añadirse dos ceros al capital i separar entónces 6 cifras en vez de las 4 que indica la regla.

324. *Regla para hallar el capital que sumado con*

su interés simple durante cierto tiempo i á un tanto por ciento convenido se convierte en otra cantidad determinada.

Multiplíquese la cantidad en que se convierte el capital por 100 si el tiempo está en años, por 1200 si en meses i por 36000 ó 36500 si en dias; divídase este producto por la suma de 100, 1200, 36000 ó 36500 con el producto del tanto p.0/0 multiplicado por el tiempo i el cociente dará el capital,

EJEMPLO.—Hallar el capital que sumado con su interés simple por 8 meses i al 3 p.0/0 se convierte en $16000.

CALCULO.

$$\text{Capital} = \frac{16000 \times 12000}{1200 + 8 \times 3} = \$15686'27$$

Fórmulas jenerales para el interés simple.

Tiempo en meses	Tiempo en dias
$\text{Intereses} = \frac{ct \times p. \times 0/0}{1200}$	$\text{Interés} = \frac{c \times t \times p.0/0}{36000 \text{ ó } 36500}$
$\text{Capital} = \frac{1200 \times i}{t \times p.0/0}$	$\text{Capital} = \frac{36000 \text{ ó } 36500 \times i}{1 \times p.0/0}$
$\text{Tiempo} = \frac{1200 \times i}{c \times p.0/0}$	$\text{Tiempo} = \frac{36000 \text{ ó } 36500 \times i}{c \times p.0/0}$
$\text{Tanto p.0/0} = \frac{1200 \times i}{c \times t}$	$\text{Tanto p.0/0} = \frac{36000 \text{ ó } 36500 \times i}{c \times t}$

Tiempo en años.

$$\text{Interés} = \frac{c \times t \times p.0/0}{100}$$

$$\text{Capital} = \frac{100 \times i}{t \times p.0/0}$$

$$\text{Tiempo} = \frac{100 \times i}{c \times p.0/0}$$

$$\text{Tanto p.0/0} = \frac{100 \times i}{c \times t}$$

Interés compuesto.

325. *Hemos dicho* que el interes es compuesto, cuando al fin de cada período de tiempo que será de un dia, un mes, un año como se quiera, se agregan al capital los intereses producidos para dar nuevas utilidades en los períodos siguientes.

Llámase monto, la suma un capital con sus intereses agregados,

En el interés compuesto ocurren cuatro cuestiones principales, que á continuacion indicaremos juntamente con las reglas que pueden emplearse para resolverlas.

326. 1.° Dado el capital, el tanto por ciento i el tiempo hallar el monto.

Regla.—Elévese 100 sumado con su interés simple en un período á la potencia de un grado igual al número de períodos: esta potencia multiplíquese por el capital i el producto divídase por 100 elevado á una potencia de un grado tambien igual al número de períodos.

Ejemplo.—Averiguar á cuanto asciende un capital de $700 á interés compuesto durante 4 años i al 5 p.0/0 capitalizándose los intereses cada año.

Resolucion $\left\{ M = \frac{(100+5)^4 \times 700}{100^4} = \frac{121550625 \times 700}{100000000} = \$850'85437\,5 \right.$

327. *Cuando el tiempo* esté expresado en años i se capitalicen los intereses cada año se facilita mucho la práctica de este caso mediante la siguiente regla: escríbase el capital i multiplíquese por el tanto por ciento colocándose el producto debajo, corriendo dos lugares hácia la derecha: súmense ambas cantidades i así tendremos el monto durante el primer año.

Este monto multiplíquese por el tanto por ciento: colóquese el producto debajo corriendo dos lugares hácia la derecha i súmense ambas cantidades, resultando así el monto durante el segundo año. [continúese en adelante de la misma manera hasta que se encuentren tantos montos cuantos sean los años. Las cifras corridas hácia la derecha considérense como decimales.

Ejemplo—Resolvamos por esta regla el problema anterior para lo cual dispondremos el cálculo como sigue:

	Capital $700
	Producto por 5..... 3500
Monto en el 1.er año.....	$735'00
	Producto por 5.....36'7500
Monto en el 2.° año.....	$771'7500
	Producto por 5.....38'587500
Monto en el 3.er año.....	$810'337500
	Producto por 5..... 4051687500
Monto en el 4.° año.....	$850'854375

328. 2.ª *Cuestion.*—Dado el monto, el tanto por ciento i el tiempo hallar el capital.

Regla.—Multiplíquese el monto dado por 100 elevado á una potencia de un grado igual al número de períodos, i el producto divídase por 100 sumado con su interés simple en un período i elevada esta suma á la potencia tambien de un grado igual al número de periodos.

Ejemplo.—Supongamos que se quiere encontrar el capital que á interès compuesto durante 4 años, i al 5 p.0/0 se convirtió en $850'854375.

$$\text{Resolucion}\left\{ C=\frac{850'854375\times 100^4}{(100+5)^4}=\frac{85085437500}{121550625}=\$700 \right.$$

329. 3.ª *Cuestion.*—Dado el monto, el capital i el tiempo hallar el tanto por ciento.

Regla.—Divídase el monto por el capital: al cociente extráigase la raiz de un grado igual al número de períodos: de esta raiz que resulte réstese 1 i lo que quede multiplicado por 100 es el tanto por ciento.

Ejemplo,—Averiguar á qué tanto p.0/0 se impuso un capital de $700 para que durante 4 años i á interés compuesto se haya convertido en $850'854375.

$$\text{Resolucion}\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{850'854375}{700}=1'21550625 \\ \sqrt[4]{1'21550621}=1'05 \\ 1'05 \text{ menos } 1=0'05;\ \text{i } 0'05\times 100=5 \text{ que es} \\ \text{el tanto p.0/0.} \end{array} \right.$$

330 4.ª *Cuestion.*—Dado el monto, el capital i el tanto por ciento hallar el tiempo.

Regla.—Divídase el monto por el capital: el cociente que resulte i los demás que sigan divídanse por 1 sumado con el interés simple de 1 en un período. El número de divisiones que se hagan menos una, será el número de períodos ó el tiempo que se busca,

Ejemplo.—Averiguar durante cuanto tiempo se impuso á interés compuesto un capital de $700 para que, capitalizando los intereses cada año se haya convertido al 5 p.0/0 en $850'854375.

Resolucion.

```
              |700
850'854375    |-----------|1'05
              |1'2155 0625|-------|1'05
                          |1'157625|------|1'05
                                   |1'1025|----|1'05
                                          |1'05|----
                                                |1
```

El interés simple de $1 en un año es evidentemente 5 centavos, i como el número de divisiones practicadas es cinco, será 4 años el tiempo durante el cual se impuso el capital.

331. *Para hallar el monto* cuando el tiempo no expresa un un número exacto de períodos, se encuentra primero el que corresponde al número cabal que haya de períodos, i despues se agregará al resultado que se obtenga el interés simple que le corresponde durante la fraccion de tiempo menor que un período.

Ejemplo.—Hallar el monto correspondiente á $500 en 2 años 5 meses al 4 p.0/0 i capitalizando los intereses cada año.

Para resolver esta cuestion, buscamos el monto que corresponde durante 2 años, el cual es, segun las reglas explicadas $540'80. Agregando ahora á esta cantidad su interés simple durante los 5, meses que es de $9'01, tendremos $549'81, cantidad que resuelve la cuestion.

332. *Fórmula jeneral* que resuelve las cuestiones de interés compuesto:

$$\text{Monto} = \frac{(100+r)^p}{100^p} \times C$$

C representa el capital; *p* el número de períodos i *r* el interés de 100 en un período.

Observacion.—La práctica del interés compuesto se completa con el uso de los logaritmos, ó bien con el auxilio de tablas que dan de antemano el monto de un capital en diferentes tiempos i á diferentes tantos por ciento.

A continuacion insertamos una tabla que dá el monto de 1 peso de 1 á 15 años, al 3, 4, 5, 6 i 7 por ciento.

Años	3 p.0/0	4 p.0/0	5 p.0/0	6 p.0/0	7 p.0/0
1	1'030000	1'040000	1'050000	1'060000	1'070000
2	1'060900	1'081600	1'102500	1'123600	1'144900
3	1'092727	1'124864	1'157625	1'191016	1'225043
4	1'125509	1'169857	1'215506	1'262477	1'310795
5	1'159274	1'216653	1'276282	1'338226	1'402552
6	1'194052	1'265319	1'340096	1'418519	1'500730
7	1'229874	1'315932	1'407100	1'503630	1'605781
8	1'266770	1'368569	1'477455	1'593848	1'718186
9	1'304773	1'423312	1'551328	1'689479	1'838459
10	1'343916	1'480244	1'628895	1'790848	1'967151
11	1'384234	1'539454	1'710339	1'898299	2'104852
12	1'425761	1'601032	1'795856	2'012196	2'252191
13	1'468534	1'665073	1'885649	2'132928	2'409845
14	1'512590	1'731676	1'979932	2'260904	2'578534
15	1'557967	1'800943	2'078928	2'396558	2'759032

Regla de descuento.

333. *Se llama descuento*, el interés que se rebaja de un capital por efectuarse el pago de este antes del vencimiento de su plazo.

El valor del capital expresado en el documento que se descuenta se llama *valor nominal*, i el valor á que se reduce el documento practicado el descuento se llama *valor actual ó valor presente.*

Segun esto, el *valor nominal* puede considerarse como una suma cuyos sumandos son el *valor actual* i el descuento, i de aquí, que conocidas dos de estas cantidades es mui fácil encontrar la tercera.

334. *Division del descuento.*-El descuento se divide en racional i comercial.

Descuento racional, es el interés que se rebaja de una cantidad igual al *valor actual* de un documento, por el tiempo que falta para el vencimiento de su plazo; i *descuento comercial* es el interés que se rebaja de una cantidad igual al *valor nominal* de un documento tambien por el tiempo que falte para el vencimiento de su plazo.

De los dos descuentos, se comprende que es mas equitativo el *racional*, porque este significa el interés de una cantidad igual á la que se anticipa como valor del documento, lo cual es mui justo, mientras que, el *descuento comercial* significa el interés de una cantidad mayor que la que se anticipa, resultando de aquí que se perjudique al dueño de un documento, cobrándosele intereses por mayor suma que la que desembolsa el comprador.

335 *Regla para el descuento racional.* Multiplíquese el valor nominal del documento por el tanto por ciento i por el tiempo i el producto divídase por la suma de 100, de 1200, de 36000 ó de 36500 con el producto del tanto por ciento multiplicado por el tiempo, segun que éste se exprese en años, meses ó dias.

Ejemplos.—1.° Descontar una letra valor de $5000, que vence dentro de 2 años, al 3 p.0/0, [desc. rac.]

Calculo.

$$\text{Descuento}=\frac{5000\times3\times2}{100+3\times2}=\frac{30000}{106}=\$283'02$$

2.° Descontar al 2 p.0/0 una letra valor de $7500 que vence dentro de 5 meses.

Calculo

$$\text{Descuento}=\frac{7500\times2\times5}{1200+2\times5}=\frac{75000}{1210}=\$61'98$$

3.° Descontar al 1'50 p.0/0 un documento, valor de $800 que debe pagarse en término de 65 dias.

CALCULO.

$$\text{Descuento} = \frac{800 \times 1'50 \times 65}{36000 + 1'50 \times 65} = \frac{78000}{36097'50} = \$2'15$$

Fórmula del descuento racional: $D = \frac{n \times 0f_0 \times t}{100 + 0f_0 \times t}$

cambiándose el término 100 por 1200 si el tiempo está en meses; por 36000 ó 36500 si está en dias i no modificarlo cuando el tiempo está en años.

Como en esta fórmula entran cuatro cantidades, será fácil deducir cualquiera de ellas que no sea D, en funcion de las otras tres.

336 *Regla para el descuento comercial.*-El descuento comercial se calcula como el interés simple es decir, que se multiplica el valor nominal del documento por el tanto por ciento i por el tiempo, i el producto se divide por 100 si el tiempo está en años, por 1200 si está en meses i por 36000 ó 36500 si está en dias.

EJEMPLOS.—Resolver por descuento comercial las tres cuestiones anteriores:

1.ª Descontar una letra, valor de $5000 que vence dentro de 2 años al 3 p.0/0 (desc. com.)

CALCULO.

$$D = \frac{5000 \times 2 \times 3}{100} = \$300$$

2.ª Descontar al 2 p.0/0 una letra valor de $7500 que vence dentro de 5 meses.

CALCULO.

$$D = \frac{7500 \times 2 \times 5}{1200} = \$62'50$$

3.ª Descontar al $1'50 p.0/0 un documento valor de $800 que debe pagarse dentro de 65 dias.

CALCULO.

$$D = \frac{800 \times 1'50 \times 65}{36000} = \$2'17$$

Como se observa en estas cuestiones, el descuento *comercial* es mayor que el descuento *racional* i así debia ser en efecto, porque el descuento comercial se compone: del interés del valor presente de la letra mas el interés de este interés.

Fórmula del descuento comercial: $D=\frac{n \times \% \times t}{100}$

cambiándose el término 100 por 1200 si el plazo está en meses, i por 36000 ó 36500 si está en dias, i no modificándose cuando el plazo está en años.

Las otras cuestiones que puedan ocurrir en este descuento se resolverán fácilmente por las mismas reglas del interés simple.

A pesar de que el descuento comercial es un descuento injusto i si se quiere abusivo, es el que mas se emplea por dos razones principales á saber: 1.ª la costumbre que se ha tenido siempre de descontar así los documentos i 2.ª ser mas fácil el cálculo del descuento comercial, segun se comprende con solo la inspeccion de ámbas fórmulas.

337 *Descuento compuesto.* Para hallar el valor presente de un documento descontado á interés compuesto, se eleva la diferencia entre $1 i el interés de $1 en un período, á la potencia de un grado igual al número de períodos i el producto se multiplica por el valor nominal del documento.

Ejemplo.—Hemos hecho la compra de una letra valor de $5000 á plazo de 2 años; i deseando pagar al contado nos conceden un descuento de 6 por ciento anual á interés compuesto ¿cuánto deberá darse como valor actual de dicha letra?

Resolucion: $A=[1-0'06]^2 5000=\$4418$.

Luego $D=\$5000-4418=\$582$.

Fórmula de la regla anterior: $A=[1-\frac{\%}{100}]^n$.

Regla de vencimiento medio ó de plazo comun.

338. *Objeto de esta regla.*—El objeto de esta regla es reducir á una sola época de pago i sin que haya ganancia ni pérdida, la reunion de varias cantidades que deben ser pagadas en épocas diversas.

Tiene lugar pues el vencimiento medio, siempre que una persona posee varios documentos que deben pagarse en diferentes plazos, i conviene cambiarlos por uno solo, de modo que este tenga en el acto de efectuar el cambio, un valor equivalente á la suma de los documentos cambiados.

339 *Para hallar el plazo comun* ó vencimiento medio, multiplíquense los valores de los documentos por sus plazos reducidos á la misma especie, i la suma de los productos que resulten divídase por la suma de los mismos valores.

Ejemplo.—Un comerciante tiene 3 letras á saber:

La 1.ª de $5000 con plazo de 6 meses

La 2.ª de ,,1840 con plazo de 15 meses

La 3.ª de ,, 870 con plazo de 12 meses

I queriendo cambiarlas por una sola letra ¿qué plazo deberá tener esta?

Calculo.

$ 5000X6 =30000
,, 1840X15=27600
,, 870X12=10440

$ 7710; suma68040 : 7710=8 meses, 24 dias, plazo que deberá tener la nueva letra.

ANUALIDADES.

340. *Definicion.*—Llámanse anualidades los pagos iguales que se hacen año [1] por año hasta extinguir la deuda de un capital i sus intereses compuestos.

Las anualidades tienen la gran ventaja de facilitar á un deudor el medio de ir cubriendo su crédito poco á poco i sin mucho esfuerzo de su parte.

Fórmula de las anualidades.

$$\text{Anualidad} = \frac{\text{Cap.} \times \text{tanto por } 1 \times [1 + \text{tanto por } 1]^t}{[1 + \text{tanto por } 1]^t - 1}$$

Esta fórmula es fácil interpretarla, i por medio de

(1) Estos pagos pueden tambien hacerse por meses, trimestres, etc. llamándose anualidades porque comunmente se hacen cada año.

ella podria deducirse cualquiera de sus otros términos en funcion de los demás.

Ejemplo.—Suponiendo que se han recibido $5000 á interés compuesto i al 4 p.0/0 con la condicion de extinguir el capital é intereses en 3 anualidades ¿á cuánto asciende la anualidad?

Calculo.

$$\text{Anualidad}=\frac{5000\times0'04\times[1+0'04]^3}{[1+0'04]^3-1}=\frac{224'972800}{2'124864}=\$105'87$$

La condicion indispensable en toda cuestion de anualidades es: que el conjunto de todas las anualidades i de sus intereses compuestos debe amortizar, tanto el capital prestado como los intereses compuestos de este capital durante el plazo convenido.

RENTAS VITALICIAS.

341 *Definicion.* Se llama renta vitalicia, la anualidad que recibe una persona por un capital prestado con la condicion de que al fin de su vida quede extinguido su caudal.

Para encontrar la renta vitalicia de una persona se aplica la regla de las anualidades, considerando por tiempo la edad probable de la misma persona.

A continuacion insertamos una tabla, que da la edad de una persona con el tiempo probable de su vida

Edades	1,	5,	10,	15,	20,	25,	30,	35,	40,
Duracion probable	37,	$45\frac{5}{7}$,	43,	39,	$35\frac{1}{2}$,	$32\frac{1}{2}$,	$29\frac{1}{2}$,	26,	23,
Edades	45,	50,	55,	60,	65,	70,	75,	80,	85,
Duracion probable	20,	17,	14,	11,	$8\frac{2}{3}$,	$6\frac{1}{2}$,	5,	$3\frac{1}{2}$,	$2\frac{2}{5}$,

Segun esto, para una persona de 50 años que tiene de vida probable 17, su renta vitalicia sería una anualidad calculada con un tiempo igual á estos 17 años.

AMORTIZACION.

342 *Definicion.*—Llámase amortizacion, la extincion que hacen el Gobierno, el Municipio ó una sociedad

cualquiera, de la deuda que contraigan con motivo de un empréstito que hayan formalizado.

Para calcular el fondo anual de amortizacion, se emplea comunmente, la fórmula de las anualidades; pero algunas naciones (que han adoptado otro sistema para amortizar sus empréstitos, el cual consiste en extinguir el capital prestado, por medio de un fondo anual invariable i de los intereses compuestos que este fondo produce,) hacen uso de esta otra fórmula:

$$\text{Fondo anual de amortizacion} = \frac{\text{Capital} \times \text{tanto por 1}}{(1 + \text{tanto por 1})^t - 1}$$

IMPOSICIONES.

343 *Definicion.*-Se llaman imposiciones, los capitales colocados en algun establecimiento de crédito i en tiempos iguales, con el objeto de reunir otro capital al cabo de cierto plazo.

Para hallar el capital ó suma capitalizada al cabo de cierto tiempo de una imposicion se aplica la siguien te fórmula:

$$\text{Cap.} = \text{imposicion} \times \frac{[1 + \text{tanto por 1}]^{t+1} - [1 + \text{tanto por 1}]}{\text{tanto por 1}}$$

Observacion.—Los cálculos sobre anualidades, rentas vitalicias, amortizacion é imposiciones, se facilitan mucho con el auxilio de tablas que las hai construidas apropósito, i en su defecto, con el empleo de los logaritmos.

Reglas de tanto por ciento ó cuestiones de percentaje.

344. *Reglas de tanto por ciento* son ciertas reglas de tres en que uno de sus términos es 100 ó una modificacion de 100.

Cuestiones de percentaje son aquellas en que hai que tomar el tanto por ciento de una cantidad.

Corresponden á las reglas de tanto por ciento las cuestiones de ganancias i pérdidas, de corretaje, de tara, de comisiones, de seguros, de fondos públicos ó

rentas sobre el papel del Estado, de impuestos i de letras de cambio.

Para dar una idea de todas estas cuestiones ponemos á continuacion un ejemplo de cada una con su resolucion correspondiente,

345 1.° *Cuestion de ganancias i pérdidas.*—Se vendió una mercaderia en $400 ganándose en la venta el 5 p.0/0 ¿cuánto costó dicha mercaderia?

RESOLUCION.

$$\left.\begin{array}{r}\$100—\$105\\ X—\ 400\end{array}\right\} X=\frac{100\times400}{105}=\$380'95$$

346 2.° *Cuestion de corretaje.*-¿Cuánto importa el corretaje de una letra de $3600 al 1'50 p.0/0?

RESOLUCION.

$$\left.\begin{array}{r}\$\ 100—1'50\\ \$3600—\ X\end{array}\right\} X=\frac{1'50\times3600}{100}=\$54$$

347 3.° *Cuestion de tara* [1].-¿Cuál es la tara correspondiente á 1400 qq. peso bruto, siendo la tara el 5 p.0/0?

RESOLUCION.

$$\left.\begin{array}{r}100\text{ qq. peso bruto}—5\text{ qq, tara}\\ 1400\ ,,\quad ,,\quad ,,\quad —X\ ,,\quad ,,\end{array}\right\} X=\frac{5\times1400}{100}=70\text{ qq.}$$

348 4.° *Cuestion de comision.*—Un comisionista ha vendido una mercadería por $3500, siendo su comision el 0'50 p.0/0 ¿cuánto le corresponde?

RESOLUCION.

$$\left.\begin{array}{r}\$\ 100—0'50\\ \$3500—\ X\end{array}\right\} X=\frac{0'50\times3500}{100}=\$17'50$$

349 5.° *Cuestion de seguros.*—Un comerciante hace asegurar un cargamento de quesos que remite á Nueva

(1) *Tara* es el peso de los sacos, cajas etc. en que vienen las mer- mercaderias.

Peso bruto ó *súcio*, es el peso de la mercaderia reunido á la tara, i *peso neto* ó *limpio*, es el de solo la mercaderia.

York, siendo el valor del cargamento $450 i pagando 3 p.0/0 de prima ¿cuánto le importará el seguro del cargamento.

RESOLUCION.

$$\left.\begin{array}{l}\$\ 100-3\\ ,,\ 450-X\end{array}\right\}\ X=\frac{3\times 450}{100}=\$13'50$$

350 6.° *Cuestion de fondos públicos*: ¿Sabiendo que los vales de la deuda interior están en el país al 36 p.0/0 ¿cuánto costarán en plata $3400 en vales?

RESOLUCION.

$$\left.\begin{array}{l}\$\ 100 \text{ en vales}-\$36 \text{ en plata}\\ \$3400 \text{ en vales}-\ X \text{ en plata}\end{array}\right\}\ X=\frac{36\times 3400}{100}=\$1224.$$

351 7.° *Cuestion de impuestos.*-Sabiendo que en Guatemala, la contribucion de alumbrado es el 5 p.0/0 sobre el producto anual de las casas ¿cuánto deberá enterar cada trimestre un propietario cuyas casas reditúan anualmente por todo $15600?

RESOLUCION.

$$\left.\begin{array}{l}\$\ \ 100-5\\ \$15600-X\end{array}\right\}\ X=\frac{5\times 15600}{100}=\$780$$ al año ó sean $260 cada trimestre.

352 8.° *Cuestion de letras de cambio* [1].-Se necesita sobre California una letra valor de $2500, i sabiendo que el cambio está al 5 p.0/0 de *premio* ¿cuánto deberá entregarse aquí en plata por dicha letra?

RESOLUCION.

$$\left.\begin{array}{l}\$\ 100 \text{ de letra}-\$105 \text{ plata}\\ \$2500 \text{ de letra}-\ \ X\ \ \text{plata}\end{array}\right\}\ X=\frac{105\times 2500}{100}=\$2625$$

---

[1] Se llaman letras de cambio ciertos documentos que se dan para pagarse en otra plaza comercial.

Las letras de cambio pueden estar á *premio* ó á *descuento*. Están á *premio* cuando por $100 de la letra se han de dar aquí más de 100 pesos en plata; i están á *descuento* cuando por 100 pesos de la letra se han de dar aquí menos de 100 pesos en plata.

Regla de promedios.

353 *Definicion.*—Llámase regla de promedios la que tiene por objeto hallar el término medio de varias cantidades.

Para hallar el promedio de varios números, divídase la suma de todos por el número de ellos.

EJEMPLOS.—1.° En un colejio se gasta en el primer mes $350, en el 2.° 540, en el 3.° 400, en el 4.° 500, en el 5.° 365, en el 6.° 420 i en el 7.° 390. ¿Cuánto se gastará por término medio en cada uno de los 7 primeros meses del año?

Resolucion { $ 350, ,, 540, ,, 400, ,, 500, ,, 365, ,, 420, ,, 390 } térm°. medio = 2965 : 7 = $423'571

Suma $2965

2.° Habiéndose medido una distancia, varias veces se encontró como primer resultado 175 metros, como 2.° 174'24, como 3.° 175'25, como 4.° 174'36, como 5.° 174'80 i como 6.° 175'01 ¿cuál será el término medio de estas cantidades, i por lo tanto el valor más aproximado de la distancia?

Resolucion { 175, 174'24, 175'25, 174'36, 174'80, 175'01 } térm°. medio = 1048'66:6 = 174'777

Luego el valor más exacto de la distancia, será de 174 metros i 777 milímetros.

Suma 1048'66

Regla de mezcla ó aligacion. (1)

354 *Definicion.*—Regla de mezcla ó aligacion es la que

(1) La palabra *mezcla* se aplica á las mercaderias i á los líquidos de la misma naturaleza; i la palabra *aligacion* á los metales que se combinan en estado fundente.

enseña á resolver las siguientes cuestiones:

1.ª Dados los ingredientes i sus precios ó calidades, hallar el precio medio ó calidad media, sin perder ni ganar.

2.ª Dados los precios ó calidades de los ingredientes, i el precio ó calidad media, hallar el número de ingredientes que deben mezclarse de cada clase.

La regla para resolver la primera cuestion se llama regla de aligacion *media;* i la que se aplica para resolver la segunda se llama regla de aligacion *inversa* ó *alternada.*

355 *Aligacion media.* Regla.—Para hallar el precio ó calidad media de varios ingredientes mezclados, multiplíquense las cantidades de estos por sus precios ó calidades respectivas, i el producto divídase por la suma de las mismas cantidades.

Ejemplos,—1.° Teniendo 20 garrafones de aguardiente de á $20 el garrafon; 16 garrafones de á $10;: 45 de á $15 i 4 de á $12, desean mezclarse con el objeto de realizarse el aguardiente con mas baratura i prontitud sin perder ni ganar ¿cuánto costará el garrafon de aguardiente mezclado?

Resolucion.

20	garrafones	—$ 20....	$ 400
16	,,	—,, 10....	,, 160
45	,,	—,, 15....	,, 675
4	,,	—,, 12....	,, 48
Suma 85	garrafones	Suma	$1383

: 85= $15'09, precio á como puede venderse el garrafon de la mezcla.

2.° Tenemos 24 onzas de oro de 18 quilates la onza, 35 onzas de á 15 quilates, 40 onzas de 20 quilates i 5 onzas de 22 quilates. Si se mezcla este oro ¿de cuántos quilates saldrá la onza de la mezcla?

RESOLUCION.

24 onzas	—18 quilates	432	quilates
35 ,,	—15 ,,	525	,,
40 ,,	—20 ,,	800	,,
5 ,,	—21 ,,	110	,,
104		Suma 1867 : 104 = 19	quilates

que son los que proximamente tiene cada onza de oro mezclado

Aligacion inversa.

356 *La aligacion inversa* se divide en simple i compuesta: es *simple* cuando solo se dan dos precios ó calidades i el precio ó calidad media; i es *compuesta*, cuando se dan más de dos precios ó calidades i el precio ó calidad media.

En la aligacion simple ocurren cuatro casos que á continuacion exponemos con sus correspondientes reglas,

357 1.° *Dados los precios ó calidades i el precio ó calidad media, hallar el número de ingredientes de cada clase Regla.*—Escríbase á la derecha del precio ó calidad mayor la diferencia entre el precio ó calidad menor i el precio ó calidad media, i á la derecha del precio ó calidad menor, la diferencia entre el precio ó calidad mayor i el precio ó calidad media.

Estas diferencias i los números que resulten de multiplicarlas ó dividirlas por una misma cantidad darán cuantas soluciones se quiera, de modo que la cuestion es indeterminada.

EJEMPLO.—Teniendo café de á $12 el quintal i café de á 18 ¿cuántos quintales podríamos mezclar de cada precio, para vender el quintal de la mezcla á $14 sin perder ni ganar?

RESOLUCION.

$14	$12 qq.....4 qq.	2 qq.	8 qq.	12 qq.	10 qq.	1 qq.
	$18 qq.....2 qq.	1 qq.	4 qq.	6 qq.	5 qq.	2 qq.

Como se ve en este cálculo, la diferencia entre el

precio menor i el medio que es 14 la colocamos á la derecha de 12 i la diferencia entre el precio mayor i 14 la colocamos á la derecha de 18. De aquí resulta que se pueden mezclar 4 qq. de á $12 el quintal con 2 qq. de á $18; i si ambas diferencias las multiplicamos ó dividimos por una misma cantidad, resultan los números 2 i 1; 8 i 4; 12 i 6, etc. que tambien resuelven perfectamente la cuestion.

358 2.° *Dados los precios ó calidades, el precio ó calidad media i la suma de todos los ingredientes, averiguar los que deben mezclarse de cada clase.*

Regla.—Hállense las diferencias por la regla anterior, i despues divídase la suma dada de los ingredientes en partes proporcionales á las mismas diferencias.

Ejemplo.—¿Cuántos litros de vino de á 7 reales i de á 16 reales podrán mezclarse para tener 3600 itros i vender el litro de la mezcla á 12 reales?

Resolucion.

3600 l.

12	7 rls.	4	3600 : 9=400
	16 rls.	5	400×4=1600 litros precio inferior
		9	400×5=2000 litros precio superior

En efecto 1600 litros+2000 litros=3600

359 3.° *Dados los precios ó calidades, el precio ó calidad media, i la diferencia entre el número de ingredientes de un precio ó calidad i el número de ingredientes del otro precio ó calidad, hallar el número de ingredientes de cada clase.*

Regla.—Hállense las diferencias segun se ha explicado: multiplíquese despues la diferencia dada entre los números de ingredientes, por la diferencia escrita al lado de cada precio ó calidad; i los productos divididos por la diferencia entre las diferencias colocadas al lado de cada precio ó calidad, serán respectivamente los números de ingredientes de cada clase.

Ejemplo.—Se quiere mezclar aguardiente de 25 centavos la botella con aguardiente de 33 centavos; pero con la condicion de que se tomen 40 botellas mas

de un precio que de otro. Queriendo que cada botella de la mezcla se venda á 28 centavos ¿cuántas deberán mezclarse de cada precio?

RESOLUCION.

40 botellas mas de un precio que de otro.

$$28\begin{cases}25 \text{ centavos}..5 \\ \\ 33 \text{ centavos}..3\end{cases}\begin{cases}Y=\dfrac{40X5}{5-3}=\dfrac{200}{2}=100 \text{ botellas} \\ \\ S=\dfrac{40X3}{5-3}=\dfrac{120}{2}=60 \text{ botellas}\end{cases}$$

I en efecto, 100 botellas—60 bolletas—40 botellas, diferencia supuesta. (1)

360 4.° *Dados los precios ó calidades, el precio ó calidad media, i el número de ingredientes de un precio ó calidad, hallar el número de ingredientes del otro precio ó calidad.*

Regla.— Hállense las diferencias como antes: divídase despues el número de ingredientes conocido, por la diferencia escrita al lado del precio ó calidad correspondiente á dicho número, i el cociente, multiplicado por la otra diferencia, dará el número de ingredientes que se busca.

EJEMPLO.—¿Cuántas onzas de oro de 18 quilates podrán mezclarse con 260 onzas de 25 quilates, debiendo salir cada onza de la mezcla de 20 quintales?

RESOLUCION.

$$20\begin{cases}18 \text{ qq.} \\ 25 \text{ qq.}200 \text{ onzas}\end{cases}\begin{cases}\text{Dif}^{s}. \\ 5 \\ 2\end{cases}\begin{cases}Y=[200:2]X5=400 \text{ onz}^{s}.\end{cases}$$

Luego deben mezclarse 500 onzas de 18 quilates, es decir de calidad inferior.

Aligacion inversa compuesta.

361. 1.er *Caso.—Dados los precios ó calidades de los ingredientes i el precio ó calidad media, hallar los ingredientes que pueden mezclarse de cada clase.*

(1) La letra *I* significa número de ingredientes de precio ó calidad inferior, i la *S*, número de ingredientes de precio ó calidad superior.

Regla.—Conexiónense cada dos precios ó calidades que comprendan al precio ó calidad media i hállense despues las diferencias como si se tratase de aligaciones simples. Cuando haya mas precios ó calidades superiores que inferiores i viceversa, se sumarán las diferencias que correspondan á un mismo precio ó calidad. Las diferencias que resulten, i los números que se obtengan multiplicándolos ó dividiéndolos por un mismo número darán cuantas soluciones se quiera del problema.

Ejemplos.—1.° ¿Cuántos litros de vino de á 8 reales, de á 10, de á 5, de á 17 de á 16 i de á 20, podrán mezclarse para vender el litro de la mezcla á 13 reales?

Resolucion.

Primeras conexiones			Soluciones			
12 rls.	5 rls.	8 l;	16 l;	24 l;	4 l.	
	8 rls.	5 l;	10 l;	15 l;	2'5 l.	
	10 rls.	4 l;	8 l;	12 l;	2 l.	
	16 rls.	2 l;	4 l;	6 l;	1 l.	
	17 rls.	4 l;	8 l;	12 l;	2 l.	
	20 rls.	7 l;	14 l;	21 l;	3'5 l.	

Segundas conexiones			Soluciones			
12 rls.	5 rls.	5 l;	10 l;	15 l;	2'5 l;	
	8 rls.	8 l;	16 l;	24 l;	4 l;	
	10 rls.	4 l;	8 l;	12 l;	2 l;	
	16 rls.	2 l;	4 l;	6 l;	1 l;	
	17 rls.	7 l;	14 l;	21 l;	3'5 l;	
	20 rls.	4 l;	8 l;	12 l;	2 l;	

Terceras conexiones			Soluciones			
12 rls.	5 rls.	4 l;	8 l;	12 l;	2 l;	
	8 rls.	8 l;	16 l;	24 l:	4 l;	
	10 rls.	5 l;	10 l;	15 l;	2'5 l;	
	16 rls.	7 l;	14 l;	21 l;	3'5 l;	
	17 rls.	2 l;	4 l;	6 l;	1 l;	
	20 rls.	4 l;	8 l;	12 l;	2 l;	

De un modo análogo podrian hacerse otras conexiones i encontrar mas sistemas indeterminados de soluciones.

2.° ¿Cuántos quintales de café de á $10 el quintal de á 13 de á 16 i de á 20 podrán mezclarse para que salga el quintal de la mezcla á $11?

RESOLUCION.

		Soluciones
$11	$ 10	9+5+2=16 qq. 32 qq. 48 qq. 8 qq. 4 qq.
	,, 13	1 qq..... 2 qq; 3 qq; 2 qq; 1 qq;
	,, 16..	1 qq..... 2 qq; 3 qq; 2 qq; 1 qq;
	,, 20....	1 qq..... 2 qq; 3 qq; 2 qq; 1 qq;

362. 2.° *Caso.*—Dados los precios ó calidades de los ingredientes, el precio ó calidad media i la suma de todos los ingredientes, hallar los que deben tomarse de cada clase.

Regla.—Encuéntrense las diferencias por la regla del caso anterior, dividiendo despues la suma dada de los ingredientes en partes proporcionales á dichas diferencias.

EJEMPLO.—Se quiere mezclar aguardiente de á 7 reales de á 8 de á 10 de á 15 i de á 20 reales la botella, para vender la botella de la mezcla á 12 reales, i con la condicion de que en la mezcla resulten 360 botellas ¿cuántas deberán tomarse de cada precio?

RESOLUCION.

Primeras conexiones

12 rls.	7 rls.····	.....8;	12X8— 96 bots.	1.ª solucion
	8 rls.··	.....8;	12X8— 96 ,,	
	10 rls.	.....3;	12X3— 36 ,,	
	15 rls.	.....2;	12X2— 24 ,,	
	20 rls...	5+4=9;	12X9—108 ,,	
		360 : 30—12		

Segundas conexiones

12 rls.	7 rls.··	.....3;	12X3—36 bots.	2.ª solucion
	8 rls.··	.....8;	12X8—96 ,,	
	10 rls.	.....8;	12X8—96 ,,	
	15 rls.	.....5;	12X5—60 ,,	
	20 rls. ..	4+2=6;	12X6—72 ,,	
		360 : 30—12		

Terceras conexiones

12 rls.	7 rls.	3;	14'4×3= 43'2 bts.		3.ª solucion
	8 rls.	8;	14'4×8=115'2 ,,		
	10 rls.	3;	14'4×3= 43'2 ,,		
	15 rls.	5+2=7;	14'4×3=100'8 ,,		
	20 rls.	4;	14'4×4= 57'6 ,,		

360 : 25=14'4

Cuartas conexiones

12rs.	7rls.	8;	12'857×8=102'856 bots.	4.ª solucion
	8 ,,	3;	12'857×3= 37'571 ,,	
	10 ,,	8;	12'857×8=102'856 ,,	
	15 ,,	2;	12'857×2= 25'714 ,,	
	20 ,,	5×2=7;	12'857×7= 89'999 ,,	

360 : 28=12'857

Como se ve en este caso, resultan tantas soluciones, cuantas sean las diferentes conexiones que puedan hacerse con los precios ó calidades de los ingredientes.

363 3.er *Caso.—Dados los precios ó calidades, el precio ó calidad media i el número de ingredientes de uno de los precios ó calidades, hallar el número de ingredientes de cada uno de los demás precios ó calidades.*

Regla.—Encuéntrense las diferencias segun se dijo en el primer caso: despues divídase el número de ingredientes conocido, por la diferencia escrita al lado del precio ó calidad á que corresponde dicho número de ingredientes: el cociente multiplíquese por cada una de las demás diferencias i los productos serán los números que se buscan.

Ejemplo.—¿Cuántas libras de té de á 3, de á 8, de á 11 reales deberán mezclarse con 60 libras de á 12 reales para que resulte la libra de la mezcla á 9 reales?

Resolucion.

Primeras conexiones — 1.ª solucion

9rls.	3	rls. 3	60 : 6=10;	10×3=30 ℔
	8	rls. 2		10×2=20 ,,
	11	rls. 1		10×1=10 ,,
	12	rls. 60℔6		

				2.ª solucion
9rls.	3 rls.	...2	60 : 1—60	60×2—120 ℔
	8 rls.	3		60×3—180 ,,
	11 rls.	6		60×6—360 ,,
	12 rls...	60 ℔1		

En este caso tambien se observa que resultan tantas soluciones diferentes cuantas conexiones puedan hacerse con los precios ó calidades.

364 *Para probar* las operaciones de aligacion inversa, multiplíquense los ingredientes encontrados i los que se supongan por sus precios ó calidades respectivas, i si la suma de estos productos dividida por la suma de ingredientes, dá de cociente el precio ó calidad media es prueba de estar bien resuelta la cuestion.

Así por ejemplo, para probar la primera solucion del ejemplo anterior haremos el siguiente cálculo:

30 ℔× 3= 90 rls.	1080 : 120—9 rls. ó sea el precio medio.
20 ,, × 8=160 ,,	
10 ,, ×11=110 ,,	
60 ,, ×12=720 ,,	
núm. de libs. 120; Suma 1080;	

REGLA CONJUNTA, CAMBIOS I ARBITRAJES.

365 *Definicion.*—Se llama regla conjunta la que tiene por objeto hallar la relacion que hai entre dos cantidades de diferentes especies, conociendo la relacion que estas cantidades tienen con otras intermedias.

366 *Principal aplicacion de esta regla.*—Esta regla tiene por aplicacion mas importante, la reduccion de pesas, medidas i monedas de un pais á las de otro, conociendo las relaciones que ellas tienen con las de otro ú otros paises diferentes.

367 *Cambio.*—La regla conjunta recibe el nombre de *regla de cambio*, cuando se refiere exclusivamente á la reduccion de *monedas* de un pais á *monedas* de otro.

Division del cambio.—El cambio se divide en

nacional ó interior i *extranjero* ó exterior; *directo* é *indirecto*. Nacional es el que se verifica entre plazas de una misma nacion; extranjero el que se verifica entre plazas de diferentes naciones; directo el que se hace con solo la intervencion de dos plazas comerciales é indirecto el que se hace con la intervencion de varias plazas.

Se llama cambio, la mayor ó menor cantidad de monedas de una plaza que dan por una ó varias monedas de otra plaza.

368 *Arbitraje.*—Llámase arbitraje la comparacion de lo que cuesta el cambio indirecto con el directo entre dos plazas.

Segun esto la regla conjunta toma el nombre de *arbitrajes*, cuando sirve para comparar las monedas de un pais con las monedas de otro.

369 *Para resolver la regla conjunta*, escríbanse las equivalencias unas debajo de otras, procurando que el primer miembro de cada una sea de la especie del segundo miembro, de la anterior, i que el segundo miembro de la última equivalencia sea de la especie de la incógnita. Multiplíquense despues ordenadamente las equivalencias, i fórmese un quebrado cuyo numerador sea el producto indicado que no contenga la incógnita i su denominador el producto indicado que si la contenga.

Simplifíquese este quebrado, i su valor será el que resuelva la cuestion.

Ejemplos,—1.° ¿Cuánto costarán 50 varas de paño, sabiendo que 61 varas equivalen á 51 metros; que el metro tiene 100 centímeros i qne 5 centímetros de paño vale 25 centavos?

Resolucion.

X cs.= 50 varas
61 vs.= 51 metros
1 m.=100 centímetros
5 cm.= 24 centavos

$$X=\frac{50\times51\times100\times25}{61\times1\times5}=\$209'02$$

2.° ¿A cuántas varas equivalen 100 anas de Hamburgo, sabiendo que 7 de estas equivalen á 6 de Prusia; 100 anas de Prusia á 67 metros, i 5 metros á 6 varas de Hamburgo?

RESOLUCION.

$$\left.\begin{array}{rcl} X\text{ vs.} & = & 100\text{ anas Habgo.} \\ 7 & = & 6\text{ anas Prusia} \\ 100 & = & 67\text{ metros} \\ 5 & = & 6\text{ vs. Habgo.} \end{array}\right\} X\text{ vs.} = \frac{100\times6\times67\times6}{7\times100\times5} = 68'914\text{ vs.}$$

3.° ¿A cuántos pesos guatemaltecos equivalen 500 rublos de Rusia, sabiendo que 40 rublos de Rusia equivalen á 14 ducados de Hamburgo; 7 ducados de Hamburgo á 50 florines de Alemania; 6 florines de Alemania á 15 chelines de Inglaterra; 52 chelines de Inglaterra á 42 francos i 5 francos á un peso guatemalteco.

RESOLUCION.

$$\left.\begin{array}{rcl} \$X & = & 500\text{ rublos Rusia} \\ 40 & = & 14\text{ duc. Habgo.} \\ 7 & = & 50\text{ flnes. Alemanes} \\ 6 & = & 15\text{ chlnes. Ingtrra.} \\ 52 & = & 42\text{ francos} \\ 5 & = & 1\text{ peso} \end{array}\right\} \$X = \frac{500\times14\times50\times15\times42\times1}{40\times7\times6\times52\times5} = \$504'81$$

DE LAS PROGRESIONES.

370 *Definicion.*—Se llama progresion una série de números tales que cada uno se diferencia del que le antecede en una misma cantidad, ó es igual al que le antecede multiplicado por una misma cantidad.

371 *Division.*—Las progresiones se dividen en progresiones *por diferencia* i progresiones *por cociente*, i cada una de estas en progresiones *ascendentes* i *descendentes*.

Se dice que una progresion es *por diferencia* cuando cada término se diferencia del que la precede en una misma cantidad, i por *cociente* cuando cada término es igual al que le precede multiplicado por una misma cantidad.

Una progresion es ascendente cuando sus términos van creciendo de izquierda á derecha i es *descendente* cuando van disminuyendo.

La cantidad en que difiere un término de otro en una progresion por diferencia se llama *diferencia* de la progresion; i la misma cantidad por la cual se multiplican los términos en las progresiones por cociente se llama *razon* de la progresion.

372 *En la resolucion* de las cuestiones que dependen de las progresiones entran en combinacion varias cantidades á saber:

Un término cualquiera que lo representaremos por					T
Primer término	,,	,,	,,	por	1.°
Ultimo término	,,	,,	,,	,,	U
Número de términos	,,	,,	,,	,,	N
Producto de términos	,,	,,	,,	,,	P
Diferencia	,,	la	,,	,,	D
Razon	,,	,,	,,	,,	R
Suma de términos	,,	,,	,,	,,	S

Progresiones por diferencia.

373 *Su formacion.*—Para formar una progresion por diferencia, si se quiere ascendente, escríbase un número i añádasele una cantidad: al resultado añádasele la misma cantidad: á este resultado añádasele la misma cantidad i así sucesivamente.

Si se quiere descendente, escríbase un número i réstesele una cantidad: al resultado réstele la misma cantidad: á este resultado réstesele la misma cantidad i así sucesivamente.

374 *Su escritura.*—Para escribir una progresion por diferencia póngase primero, es decir á la izquierda, el signo ÷, i á continuacion todos los términos poniendo un punto entre uno i otro-

Ejemplos. 1.°—Supongamos que se quiere formar i escribir una progresion por diferencia ascendente, cuyo primer término sea 5 i su diferencia 3.

Operacion.

	÷5 .	5+3 .	5+3+3 .	5+3+3+3 .	5+3+3+3+3 ,
bien	÷5 .	8 .	11 .	14 .	17 .

2.° Formar i escribir una progresion descendente cuyo primer término sea 15 i su diferencia 2.

OPERACION.

÷15 . 15-2 . 15-2-2 . 15-2-2-2 . 15-2-2-2-2 . . . ó
bien: ÷15 . 13 . 11 . 9 . 7 . . . .

375 *Lectura.*—Para leer una progresion por diferencia antepóngase la palabra *como*, i despues entre uno i otro termino las palabras *es a.*

Así la progresion anterior se leerá: como 15 es á 13 es á 11 es á 9 es á 7.

376 *Propiedades,*-Las principales propiedades de la progresion por diferencia son las siguientes:

1.ª Cuatro términos consecutivos forman una equidiferencia.

Así, en la progresion anterior se verifica 15-13—11-9

2.ª Tres términos consecutivos forman una equidiferencia contínua.

Así, por ejemplo, de la misma progresion resulta: 15—13=13—11.

3.ª Dos términos consecutivos forman equidiferencia con otros dos.

Así, 15—13=9—7.

4.ª Tres términos equidistantes entre sí forman equidiferencia contínua.

Así, 15—11=11—7.

5.ª La suma de dos términos equidistantes de los extremos es igual á la suma de estos.

Así, en la progresion anterior se verifica 13+9—15+7

377 *Fórmula para resolver los problemas de estas progresiones.*—Progresiones ascendentes.

(1) $T=1.^{\circ}+D\times n.^{\circ}$ de términos precedentes á T
(2) $U=1.^{\circ}+D\times(N-1)$
(3) $1.^{\circ}=U-D\times(N-1)$
(4) $D=\frac{U-1.^{\circ}}{N-1}$
(5) $N=\frac{U-1.^{\circ}}{D}+1$

Progresiones descendentes.

(6) $T=1.^{\circ}-D\times n.^{\circ}$ de términos precedentes á T.
(7) $U=1.^{\circ}-D\times(N-1)$
(8) $1.^{\circ}=U+D\times(N-1)$

(9) $D=\frac{1.^{\circ}-U}{}$

(10) $N=\frac{1.^{\circ}-U}{D}+1$

Fórmula comun á ambas: $S=(1.^{\circ}+U)\times\frac{N}{2}$(11)

Sabiendo qué significa cada letra que entra en las fórmulas es mui fácil traducirlas al lenguaje ordinario.

378 *Interpolacion de medios por diferencia.*—Para interpolar entre dos términos de una progresion cualquier número de medios por diferencia, basta encontrar la diferencia de la progresion i formar esta.

Supongamos por ejemplo que entre 15 i 30 se quieren interpolar cuatro medios es decir cuatro números que con 15 i 30 formen una progresion ascendente verbigracia.

Como la progresion va á tener seis términos la diferencia será:

$$\frac{30-15}{5}=3$$

por consiguiente la progresion es: ÷15 . 18 . 21 . 24 . 27 . 30.

379 *Si entre cada* dos términos consecutivos de una progresion por diferencia se interpola el mismo número de términos, se verifica que los términos interpolados i los de la progresion propuesta forman una sola progresion total.

Ejemplo.—Sea la progresion ÷4. 10. 16. 22. 28.

Si entre cada dos términos interpolamos 2 medios verbigracia, la diferencia de todas las progresiones parciales será 2 : luego la progresion que resulta es:

÷4 . 6 . 8 . 10 . 12 . 14 . 16 . 18 . 20 . 22 . 24 . 26 . 28

Problemas.

380 1.° Un capital impuesto á rédito produjo al cabo del primer año 750 pesos: al cabo del segundo 770: al cabo del tercero 790 i así sucesivamente ¿cuánto produciría de interés al cabo del octavo año?

(Aplíquese la fórmula [2])

2.° Un móvil caminó el primer dia de su partida 5 kilómetros i el último 26. Suponiendo que cada dia

recorría 3 kilómetros mas que el dia anterior ¿en cuánto tiempo verificó su viaje?

(Aplíquese la fórmula [10])

3.° Para abrir una zanja de 15 varas de profundidad se ofreció á un jornalero 12 reales por la primera vara i tres cuartillos de aumento en la abertura de cada una de las demás varas. ¿Cuánto ganaría por la última vara i cuánto por la abertura de toda la zanja?

(Aplíquense las fórmulas [7] i [11])

4.° Un dependiente de comercio permaneció en casa del Señor N. 12 años: comenzó ganando 7 pesos mensuales i terminó ganando 350 pesos ¿Cuánto era el aumento de sueldo que tenia cada mes?

(Aplíquese la fórmula [4])

5.° Un caminante quiere llegar á cierto lugar en término de 35 dias, i para ello procura caminar cada dia 2 leguas más que en el anterior: el último dia anduvo 24 leguas ¿cnántas leguas caminó el primer dia i cuántas en los 36 dias?

Aplíquense las fórmulas [3] [11])

6.° Un caballero quiso obsequiar á una jóven suministrándole cierta pension durante todo el año: el primer dia le dió 35 centavos i el último $12, ignorándose lo que le dió los demás dias ¿qué cantidad recibió la jóven en todo el año.

Aplíquense las fórmulas [11] i [4])

7.° Un reloj que toque las medias i las horas ¿cuántas campanadas da en 24 horas?

(Aplíquense las fórmulas [2] i [11])

8.° Una persona se comprometió á pagar un capital por abonos mensuales: el primer abono fué de $5400 el segundo de $5365, el tercero de $5330 i así sucesivamente pagando $35 menos cada mes.

Habiéndose concedido de plazo 15 meses ¿á cuánto asciende el valor del capital?

(Aplíquense las fórmulas [7] i [11])

9.° Hallar el número de términos de una progresion descendente cuyo primer término es 1000, la diferencia 7 i el último término 902.

(Aplíquese la fórmula [10])

Progresiones por cociente.

381 *Definicion.*— Progresion por cociente es una série de números tales que cada uno es igual al que le antecede multiplicado por una misma cantidad llamada *razon* de la progresion.

Cuando la razon es mayor que la unidad la progresion resulta *ascendente* i cuando es menor *descendente.*

382 *Su formacion.*—Para formar una progresion por cociente se escribe un número cualquiera i luego se multiplica dicho número i cada número de los qne resulten por la razon que se elija de antemano.

Así por ejemplo, si queremos que sea 3 el primer término de una progresion i 2 la razon, los términos que la formen serán:

3, 3X2, 3X2X2, 3X2X2X2, 3X2X2X2X2, etc. ó bien:
3, 6, 12, 24, 48, etc.

383 *Su escritura.*—Para escribir una progresion por cociente, se escribe al principio el signo ÷÷ que se lee *como*, i despues cada uno de los términos, interponiendo entre uno i otro dos puntos, (:) que se leen *es á.*

Segun esto, la progresion anterior se escribirá:
÷÷3 : 6 : 12 : 24 : 48 etc.

384 *Sus propiedades.*—Las principales propiedades de las progresiones por cociente son las siguientes:

1.ª *Cuatro* términos consecutivos forman proporcion por cociente discreta.

Ejemplo.—$\frac{3}{6}=\frac{12}{24}$ (refiriéndonos á la progresion anterior.)

2.ª *Tres* términos consecutivos forman proporcion por cociente contínua.

Ejemplo.—$\frac{3}{6}=\frac{6}{12}$.

3.ª *Dos* términos consecutivos forman proporcion discreta con otros dos términos consecutivos.

Ejemplo.—$\frac{3}{6}=\frac{24}{48}$.

4.ª *El producto* de dos términos equidistantes de los extremos es igual producto de estos.

Ejemplo.—6X24=3X48.

385 *Sus fórmulas.*—Las fórmulas de que nos vale-

mos para resolver los problemas de progresiones por cociente son las siguientes:

Para las ascendentes.

$$T=1.^{\circ}\times R^{n-1} \quad (1)$$

$$U=1.^{\circ}\times R^{n-1} \quad (2)$$

$$1.^{\circ}=\frac{U}{R^{n-1}}$$

$$R=\sqrt[n-1]{\frac{U}{1.^{\circ}}}$$

$$N=\frac{\log.\ u-\log.\ 1.^{\circ}}{\log.\ R}+1$$

$$S=\frac{(U\times R)-1.^{\circ}}{R-1}$$

Para las descendentes.

$$T=\frac{1.^{\circ}}{R^{n-1}};\quad U=\frac{1.^{\circ}}{R^{n-1}}$$

$$1.^{\circ}=U\times R^{n-1};\quad R=\sqrt[n-1]{\frac{1.^{\circ}}{u}}$$

$$S=\frac{1.^{\circ}-U\times R}{1-R};\quad N=\frac{\log.\ 1.^{\circ}-\log.\ U}{\log.\ R}+1$$

Fórmula comun: $P=\sqrt{(1.^{\circ}\times U)^{n}}$

Estas fórmulas pueden fácilmente traducirse al lenguaje ordinario, sabiendo que las letras que entran en cada una significan lo mismo que en las progresiones por diferencia.

Así, por ejemplo la última fórmula dice: que para encontrar el producto de todos los término de una progresion por cociente, *se eleva el producto de los extremos á la potencia de un grado igual al número de términos i despues se extrae la raiz cuadrada de dicha potencia.*

386 *Como se observa* en las fórmulas precedentes, el número de términos de una progresion por cociente se encuentra por medio de los logaritmos; pero tambien puede encontrarse sin necesidad de ellos valiéndonos de la siguiente

---

(1) La letra *N* significa en esta fórmula el número de términos que preceden al término *T*.

(2) La *N* significa aquí el número de términos de la progresion.

Regla.

Para hallar el número de términos de una progresion por cociente, *divídase el extremo mayor por el menor: el cociente divídase por la razon considerada siempre como mayor que* 1*: este nuevo cociente i todos los demás que salgan vuelvanse á dividir por la misma razon hasta que resulte un cociente menor que ella. El número de divisiones que se hagan será el número de términos de la progresion.*

Cuando la última division no es exacta, es prueba de que no es posible formar progresion, que conste precisamente de los términos extremos que se nos dén.

Para explicar la regla, supongamos que se quiere encontrar el número de términos de una progresion cuyo primer término es 3, el último 192 i la razon 2.

Dispondremos el cálculo como sigue:

```
    | 3
192 |----| 2
    |64  |----| 2
         |32  |----| 2
              |16  |----| 2
                   |8   |----| 2
                        |4   |----| 2
                             |2   |----| 2
                                  |1
```

Como el número de divisiones practicadas es 7 resulta que la progresion consta de 7 términos, i en efecto formándola nos resulta:

÷3 : 6 : 12 : 24 : 48 : 96 : 192, que como se ve consta de siete términos cabales.

Supongamos por segundo ejemplo que se quiere calcular el número de términos de una progresion cuyo primér término es 1458, el último 2 i la razon $\frac{1}{3}$.

La progresion considerada como ascendente tendrá de razon el entero 3. Segun esto el cálculo será:

$$
\begin{array}{r|l}
1458 & 2 \\ \hline
726 & 3 \\ \hline
243 & 3 \\ \hline
81 & 3 \\ \hline
27 & 3 \\ \hline
9 & 3 \\ \hline
3 & 3 \\ \hline
 & 1
\end{array}
$$

Habiéndose efectuado 7 divisiones, la progresion constará de siete términos, i en efecto formándola tenemos.

∺1458 : 486 : 162 : 54 : 18 : 6 : 2

387 *Interpolar medios por cociente.*—Para interpolar entre dos términos de una progresion cierto número de medios por cociente, basta encontrar la razon de la progresion i formar esta en seguida.

Ejemplo.—Supongamos que entre los términos 3 i 48 de una progresion descendente se quieren interpolar tres términos.

La razon de la progresion es, segun las fórmulas anteriores, $\sqrt{48 : 3} = 2$.

Luego la progresion será:

∺48 : 24 : 12 : 6 : 3, siendo 24, 12 i 6 los medios interpolados.

388 *Si entre cada* dos términos de una progresion por cociente se interpola el mismo número de medios, los términos interpolados i los de la progresion forman una sola progresion.

Ejemplo.—Sea la progresion ∺ 2 : 16 : 128 : 1024.

Si entre cada dos términos consecutivos interpolamos dos medios verbigracia, la razon de todas las progresiones parciales es evidentemente 2, luego la progresion total será:

∺2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256 : 512 : 1024.

Problemas.

389 1.° Cuenta la historia que Sessa pidió al rei de la India en recompensa de haber inventado el Ajedrez, 1 granito de trigo por la primera casilla del tablero,

2 por la segunda, 4 por la tercera, i así sucesivamente duplicado cada número hasta completar las 64 casillas del tablero. Esto supuesto averiguar. 1.° cuantos quintales de trigo pidió Sessa; 2.° cual sería el valor de estos quintales vendidos á $10 cada uno; 3.° cuantos hombres se necesitarían para contar este valor i en cuanto tiempo, suponiendo que un hombre solo contara $80400 diarios; 4.° cuantos buques de á 1000 toneladas podrian cargarse con ese dinero sabiendo que $16 hacen una libra; 5.° cuantas vueltas se darian á la Tierra suponiendo que 22 pesos puestos uno á continuacion de otro componen la lonjitud de una vara; i 6.° cuantos pesos tocarían á cada habitante del mundo suponiendo que la poblacion de la Tierra es de 1400 millones de habitantes.

2.° Hallar el décimo término de una progresion ascendente cuya razon es 5 i el primero 20.

3.° Hallar el primer término de una progresion descendente cuya razon es $\frac{1}{4}$ i el último término 360.

4.° Encontrar la suma de los términos de una progresion ascendente en que el primer término es 4, el último 2500 i la razon 5.

5.° Calcular el número de términos de una progresion cuya razon es 5 i sus extremos 312500 i 4.

6.° Un deudor se compromete á pagar su crédito durante 10 meses dando 6 pesos el primer mes i cuadruplicando la cantidad en cada mes siguiente ¿á cuanto asciende la deuda?

7.° Convino una persona con un correo en darle 25 centavos por la primera legua que caminase 75 por la segunda i así sucesivamente triplicando la cantidad. Habiendo caminado el correo 24 leguas ¿á cuanto asciende lo que ganó?

8.° Un cartero comenzó ganando $2 mensuales i terminó ganando 120 pesos: cada mes se duplicaba su sueldo en razon de la buena conducta que observaba ¿cuanto tiempo estuvo empleado?

9.° Una persona ofrece á otra por su caballo $1500 pesos i otra le ofrece solamente un centavo por el primer clavo de las herraduras, 2 centavos por el segundo i así sucesivamente duplicando la cantidad. Constando las herraduras de 32 clavos ¿cual de las dos

ofertas convendrá mas al dueño del caballo?

10.° Suponiendo que un grano de trigo da una espiga de 50 granos ¿cuántos granos daría uno en la quinta cosecha?

11.° ¿Cuantos ascendientes tiene el hombre en la rama directa de la octava jeneracion?

De los logaritmos.

390 *Definicion.*–Logaritmos son los términos de una progresion por diferencia que comienza por 0 i que corresponden con los términos de una progresion por cociente que comienza por 1.

Así por ejemplo, si consideramos las progresiones

÷÷1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : etc. i

÷0 . 3 . 6 . 9 . 12 . 18 . 24 . etc, el logaritmo de 1 será 0; el de 2 será 3; el de 4 será 6 i asi sucesivamente.

391 *Sistema de logaritmos* es la reunion de dos progresiones con las condiciones de que una comience por 1 i la otra por 0.

Como puede haber una infinidad de progresiones que cumplan con las condiciones indicadas, resulta que hai tambien una infinidad de sistemas de logaritmos.

En cualquier sistema, el logaritmo de la unidad es siempre 0.

Base de un sistema de logaritmos es el término de la progresion por consiguiente cuyo logaritmo es 1 en la progresion por diferencia.

No todos los sistemas tienen bases exactas ó conmensurables, porque no siempre aparece el término 1 en las progresiones por diferencia.

En sistemas diferentes de logaritmos un mismo número puede tener logaritmos diferentes, i á la inversa, un mismo logaritmo puede corresponder á diferentes números.

392 *El sistema* de logaritmos jeneralmente empleado es el que se llama *ordinario, vulgar, tabular*, ó *de Brigss*.

Las progresiones que forman este sistema son las siguientes:

$\div 1 : 10 : 10^2 : 10^3 : 10^4 : 10^5 \ldots \infty$
$\div 8 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 \ldots \infty$

Los únicos números que en este sistema tienen logaritmos exactos ó conmensurables son las potencias enteras ó fraccionarias de la base que es 10.

393 *Llámase característica* de un logaritmo la parte entera que contiene, i *mantisa* la parte puramente fraccionaria ó decimal.

Así por ejemplo en el logaritmo 5'1458, la característica es 5 i la mantisa 1458 diezmilésimas.

La característica del logaritmo de un número mayor que 1 se compone de tantas unidades enteras como cifras enteras menos una tenga el número.

Así por ejemplo, el logaritmo de 584'1306 tendrá 2 de característica, el de 4'75 tendrá 0; el de 11489 tendrá 4; etc.

394 *Los números* que en el sistema de Brigss tienen solo característica en sus logaritmos, son las potencias enteras de 10; los que tienen mantisa son los comprendidos entre 1 i 10, i los que tienen característica i mantisa son los comprendidos entre dos potencias enteras cualesquiera de 10.

Los logaritmos de cualquiera potencia entera de 10 son iguales exactamente al exponente de la misma potencia.

Segun esto el logaritmo de 10^8 es 8; el de 10^{11} es 11 etc.

Los números menores que 1 tienen logaritmos menores que cero, es decir, logaritmos sustractivos ó *negativos.*

395 *Si un número* se multiplica ó se divide por una potencia entera de 10, la característica del logaritmo de dicho número se aumenta ó disminuye en tantas unidades como unidades tiene el exponente de 10 pero la mantisa no varía.

Así por ejemplo, si tenemos que log. 35=1'54407, el logaritmo de 35×10^3 será (1+4)'54407 ó 5'54407.

De igual manera, si tenemos que log. 10569=4'02403, el logaritmo de 10569 : 10^2 será (4–2)'02403 ó 2'02403.

Propiedades de los logaritmos.

396 Las propiedades principales de los logaritmos son las siguientes:

1.ª *El logaritmo de un producto es igual á la suma de los logaritmos de los factores.*

Así por ejemplo, log. $(5 \times 12 \times 4) = \log. 5 + \log. 12 + \log. 4$.

De aquí se deduce, que para hacer una multiplicacion por medio de los logaritmos se suman los logaritmos de los factores i el número correspondiente á esta suma será el producto.

397 2.ª *El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor.*

Así por ejemplo, log. $(154 : 25) = \log. 154 - \log. 25$.

De aquí se deduce, que para hacer una division por medio de los logaritmos se resta el logaritmo del divisor del logaritmo del dividendo i el número correspondiente á esta suma será el cociente.

Como un quebrado expresa el cociente indicado de una division, su logaritmo se encontrará hallándose la diferencia entre el logaritmo del numerador i el logaritmo del denominador, debiendo anteponer á esta diferencia el signo *menos* cuando el quebrado sea propio.

3.ª *El logaritmo de una potencia es igual al logaritmo del número multiplicado por el exponente.*

Así por ejemplo, log. $4^5 = \log. 4 \times 5$.

De aquí se deduce, que para elevar un número á cualquiera potencia, se multiplica el logaritmo de dicho número por el exponente, i el número correspondiente á este producto será la potencia que se quiere.

398. 5.ª *El logaritmo de una raiz es igual al logaritmo del número subradical dividido por el índice.*

Así por ejemplo, log. $\sqrt[3]{149} = \log. 149 : 3$.

De aqui se deduce, que para extraer una raiz de cualquier grado por medio de los logaritmos, se divide el logaritmo del número por el índice radical i el número correspondiente á este cociente será la raiz que se quiere.

399. *Las propiedades explicadas*, bastan por sí solas para demostrar la gran ventaja i utilidad de los

logaritmos, resultando de ellas que la operacion de multiplicar se reduce á sumar, la de dividir á restar, la de elevar á potencias á multiplicar, i la de extraer raices á dividir.

400. *Calcular el logaritmo de un entero.*—Para encontrar el logaritmo vulgar de un número entero en menos de una parte alícuota de la unidad. elévese dicho número á la potencia de un grado igual al denominador de la parte alícuota i el número de cifras de esta potencia menos una, divídase por el mismo denominador.

Ejemplo.-Calcular el logaritmo de 20 en menos de $\frac{1}{5}$

La quinta potencia de 20 es 3200000: el número de cifras de esta potencia menos una dá 6: dividiendo pues, 6 por 5, el cociente 1'2 es el logaritmo de 20 en menos de $\frac{1}{5}$

401. *Convertir un logaritmo todo sustractivo ó negativo, en otro equivalente de solo característica negativa i mantisa aditiva ó positiva.*—Regla: auméntese una unidad entera á la característica i póngase el signo *menos* encima de la suma: en seguida réstese de 9 cada cifra de la mantisa, con excepcion de la primera de la derecha que se resta de 10.

Ejemplo.—Convertir el logaritmo—3'15742, en otro de característica negativa i mantisa positiva.

Agregando 1 á la característica i poniendo el signo menos encima de la suma resulta $\bar{4}$; restando despues cada cifra de la mantisa de 9 i la primera de la derecha de 10, resulta 84258, luego—3'15742=$\bar{4}$'84258.

Tablas de logaritmos.

402. *Definicion.*—Llámanse tablas de logaritmos á un libro cuyas pájinas divididas en columnas contienen los logaritmos de los números enteros desde 1 hasta cierto límite.

Hai tablas grandes i tablas pequeñas: las primeras contienen los logaritmos de los números hasta 100000 ó 108000; i las segundas hasta 10000 ú 11000.

La ventaja de las tablas de logaritmos, se comprende desde luego, por la sencilla razon de que seria mui difí-

cil hacer una operacion si tuviesemos que calcular por separado el logaritmo de cada número lo cual no es fácil ni exijiría poco tiempo.

Aunque todos los autores de tablas logarítmicas traen por separado las reglas para hacer uso de ellas, no está demás exponer á continuacion los dos problemas que pueden ocurrir, valiéndonos para ello de las tablas de Laland que son las que mas se emplean en el curso de Aritmética elemental.

403. *Primer problema.*—Dado un número cualquiera hallar su logaritmo.

1.er *Caso: que el número sea entero i esté contenido en las tablas*: entónces el logaritmo de dicho número se hallará á su derecha en las mismas tablas.

Así por ejemplo, el logaritmo de 931 será 2'96805.

404. 2.º *Caso. que el número sea entero i no esté contenido en las tablas.*—En este caso sepárense en el número de derecha á izquierda, tantas cifras para decimales cuantas basten por lo menos para que la parte entera que quede sea un número contenido en las tablas. Búsquese despues la mantisa del logaritmo de este número i súmese con el producto de la cantidad decimal separada en el número por la diferencia entre dicha mantisa i la siguiente de las tablas. La suma que resulte será la mantisa del logaritmo del número propuesto, i la característica se formará, recordando que es igual al número de cifras enteras del número dado menos una.

Ejemplo.—Hallar el logaritmo de 158495.

Separando para decimales dos cifras por lo menos, resulta 1584'95: la mantisa del logaritmo del entero 1584, es 19976; i la diferencia tabular entre esta mantisa i la siguiente es 27 cienmilésimas. (1) Agregando pues á dicha mantisa el producto de 95 centésimas que es la cantidad decimal separada por 27 cienmilésimas tendremos que la mantisa del logaritmo del número propuesto es 0'19976+0'95×0'00027=0'20000; i como el número tiene seis cifras enteras, la caracteris-

(1) Las diferencias entre los logaritmos de dos números consecutivos, se hallan en las tablas en una columna que dice Dif. ó simplemente D por arriba.

tica de su logaritmo será 5. Luego.

Log. 158495=5'20002.

405. 3.er *Caso*,—Hallar el logaritmo de un quebrado ordinario.—Para calcular el logaritmo de un quebrado ordinario hállese la diferencia entre el logaritmo del numerador i el logaritmo del denominador, debiendo anteponer á dicha diferencia el signo menos (—) cuando el quebrado sea propio.

Ejemplos.—1.° Log. $\frac{135}{46}$=log. 135-log. 46=2'13043—1'67276=0'46757.

2.° Log. $\frac{4875}{5306}$=log. 4875—log. 5306=3'68797=—0'03680

406. 3.er *Caso.—Hallar el logaritmo de un número decimal.*—Para calcular el logaritmo de un número decimal póngase en forma de quebrado ordinario, i procédase en lo demás como en el caso anterior.

Ejemplos,—1.° Log. 25'14=log. $\frac{2514}{100}$=log. 1514—log 100=1'40037.

2.° Log. 0'1465=log. $\frac{1465}{10000}$=log. 1465—log. 10000=—0'83416.

Para hallar el logaritmo de un número misto, redúzcase á quebrado i queda reducida la operacion el 2.° caso.

407. *Segundo problema*: *dado un logaritmo hallar el número á que corresponde.*

Primer caso. Que tanto la característiea como la mantisa se encuentren en las tablas.—En este caso el número que se busca se encuentra en las tablas á la izquierda del logaritmo dado.

Ejemplo.—Siendo log. N=2'97589, tendremos que N será igual á 946,

2.° *Caso.—Que solo la mantisa se encuentre en las tablas.*—Entónces multiplíquese el número á que corresponde esta mantisa, por la unidad seguida de tantos ceros cuantos basten para que el número que se busca tenga un número de cifras enteras, igual al número de unidades de la característica mas una.

Ejemplo.—Sea el logaritmo 7'22866 cuya mantisa está en las tablas.—El número á que corresponde esta mantisa es 1693: luego el número correspondiente al logaritmo dado será 16930000, que como se vé, consta

de tantas cifras enteras como unidades tiene la característica mas una.

3.er *Caso.—Que la característica esté en las tablas i la mantisa no.*—En este caso, búsquese la mantisa menor que mas se aproxime á la mantisa dada, i escríbase el número de las tablas á que corresponde. En seguida agréguese á este número como desimales, el cociente que resulte de dividir la diferencia entre la mantisa dada i su menor próxima, por la diferencia entre esta misma mantisa i la siguiente mayor de las tablas. El misto que asi resulte será el número que se busca.

Ejemplo.— Buscar el número á que corresponde el logaritmo 3'14745.

La mantisa menor que mas se aproxima á la de este logaritmo es 14735, que se refiere en las tablas al número 1404.

La diferencia entre esta mantisa i la propuesta es 10, i la diferencia tabular entre la mantisa 14735 i la siguiente mayor de las tablas es 31. Agregando pues á 1404 como decimal, el cociente de dividir 10 por 31 que es 0'32258 tendremos 1404'32258, que es el número que se busca.

Luego 3'14745=log. 1404'32258.

408. 4.° *Caso. Que ni la mantisa ni la característica estén en las tablas.*—Entónces hágase el logaritmo de característica contenida en las tablas i procédase como en el caso anterior, corriendo la coma decimal en el misto que resulte, tantos lugares á la derecha cuantos basten para que el número que se busca tenga tantas cifras enteras como unidades mas una la característica del logaritmo dado.

Ejemplo.—Buscar el número correspondiente al logaritmo 5'14745.

El número correspondiente á 3'14745 es, en virtud del caso anterior, 1402'32258. Luego el del logaritmo propuesto será 140232'258, con seis cifras enteras porque la característica tiene 5 unidades,

409. 5.° *Caso.—Que el logaritmo sea todo negativo ó sustractivo.*—En este caso, réstese el logaritmo dado como si fuera aditivo, de un número entero igual á la característica mas 4, i búsquese el numero correspon-

diente al logaritmo que resulte por diferencia i con característica 3. Luego divídase dicho número por la unidad seguida de tantos ceros como unidades tuvo el minuendo de que se restó el logaritmo dado, i el cociente será el número que se busca.

Ejemplo.—Hallar el logaritmo de 2'10749.

Restando este logaritmo de 2+4 ó sea 6 tendremos 6—2'10749=3'89251. El número correspondiente á este logaritmo es, segun el tercer caso 7807'5, i dividiendo ahora este número por la unidad seguida de seis ceros resulta 0'0078075. Luego,

2'10749=log, 0'0078075.

410. 6.° *Caso.—Que solo la característica sea negativa.*—En este caso réstese la característica como si fuera aditiva ó positiva, de un número entero igual á la misma característica mas 3, i búsquese en seguida el número correspondiente al logaritmo que resulte de característica 3. Divídase despues dicho número por la unidad seguida de tantos ceros cuantas unidades sirvieron de minuendo á la característica del logaritmo dado i el cociente será el número que se busca.

Ejemplo.—Buscar el número correspondiente al logaritmo $\bar{3}$'35483.

Restando la característica de 3+3 ó sea 6 queda el logaritmo 3'35483. El número correspondiente á este logaritmo es, segun el tercer caso, 2263'75, i dividiendo este número por la unidad seguida de seis ceros resulta 0'00226372. Luego

$\bar{3}$'35483=log. 0'00226375.

Del complemento logarítmico.

411. *Definicion.*—Complemento de un logaritmo es la cantidad que falta á este para valer 10 ó la unidad inmediata seguida de cercs.

412. *Para encontrar* el complemento á 10 de un logaritmo réstense todas las cifras de la mantisa de 9 menos la primera de la derecha que se resta de 10.

Así por ejemplo, el complemento á 10 del logaritmo 3'15482 será igual á 10—3'15482 ó bien á

99999 + 10
31548 + 2
———
6'8451 8

413. *Complemento logarítmico* de un número es el complemento del logaritmo de este número.

Así, el complemento logarítmico de 1864 es el complemento de 3'27045 que es el logaritmo de dicho número.

414. *Objeto del complemento logarítmico.*—El complemento de un logaritmo tiene por objeto reducir la operacion de restar á una simple suma. Para conseguir esto, súmese con el minuendo el complemento á 10 del sustraendo i de la suma réstese una decena.

Ejemplo. — Hallar la diferencia entre 3'45789 i 3'21361.

Operacion.

Minuendó....3'45789+
Compto. á 10 del sustraendo 6'78639
———
Suma..10'24428 i quitando 1 decena resulta 0'24426 que es la diferencia pedida.

415. *Cuando haya* varios sustraendos i un solo minuendo, entónces súmense con el minuendo todos los complementos á 10 de los sustraendos i en la suma réstense tantas decenas como sustraendos haya.

Supongamos por ejemplo que de 8'98764 se quieren restar sucesivamente los siguientes logaritmos: 2'47211, 3'20103 i 1'67304, para lo cual practicaremos la operacion que sigue:

Minuendo	8'98764
Compto. del 1er sustraendo....	7'52789
,, ,, 2.° ,,	6'79897
,, ,, 3er ,,	8'32696

———
Suma 31'64146, i quitando en esta suma 3 decenas por los 3 sustraendos, resulta 1'64146 que es la resta que se deseaba.

Conclusion.

416. Para dar una idea de cómo son las tablas elementales de logaritmos, ponemos á continuacion los logaritmos, de los números enteros desde 4950 hasta 4982.

núm.	logarit.	dif	núm.	logarit.	dif	núm.	logarit.	dif
4950	3'69461	8	4961	3'69557	9	4972	3'69653	9
4951	3'69469	9	4962	3'69566	8	4973	3'69662	9
4952	3'69478	9	4963	3'69574	9	4974	3'69671	8
4953	3'69487	9	4964	3'69583	9	4975	3'69679	9
4954	3'69496	8	4965	3'69592	9	4976	3'69688	9
4956	3'69504	9	4966	3'69601	8	4977	3'69697	8
4956	3'69513	9	4967	3'69609	9	4978	3'69705	9
4957	3'69522	9	4968	3'69618	9	4979	3'69714	9
4958	3'69531	9	4969	3'69627	9	4980	3'69723	9
4959	3'69539	8	4970	3'69636	8	4981	3'69732	9
4960	3'69548		4971	3'69644		4982	3'69740	

FIN.

INDICE.

	Páginas
Compendio histórico de la Aritmética	1
Introduccion	1
Numeracion	7
Adicion de enteros	16
Resta de enteros	21
Multiplicacion de enteros	26
Division de enteros	39
Pruebas de las cuatro operaciones	55
Caracteres de la divisibilidad	60
Números primos	64
Máximo comun divisor	69
Mínimo comun múltiplo	72
Problema acerca de los diferentes sistemas de numeracion	74
Quebrados comunes	77
Fracciones contínuas	97
Quebrados decimales	100
Números complejos: sistemas de medidas	113
Elevacion á potencias	133
Extraccion de raices	137
Razones i proporciones	151
Regla de tres	157
Division de un número en partes proporcionales	161
Regla de compañia	163
Regla de interes simple	167
Interes compuesto	173
Regla de descuento	178
Regla de plazo comun	181
Anualidades	182
Rentas vitalicias	183
Amortizacion	183
Imposiciones	184
Reglas de percentaje	184
Regla de promedios	187
Regla de aligacion	187
Regla conjunta, cambios i arbitrajes	195
Progresiones	197
Logaritmos	207